Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{9u_n - 11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1)- Vérifier que $u_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{3u_n - 2}{11 - 9u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2)- Montrer par récurrence que $0 \le u_n < \dfrac{2}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3)- Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

4)- On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{3u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a)- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{-3}{5}$, et écrire v_n en fonction de n.

b)- Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

c)- Calculer la limite de (u_n).

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,0,-1)$ et $B(-1,2,3)$

Et soit (S) l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

1)- Vérifier que $AB = 2\sqrt{6}$ et déterminer les coordonnées du point Ω milieu du segment $[AB]$.

2)- Déterminer la nature de l'ensemble (S) et préciser ses éléments caractéristiques.

3)- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

4)- a)- Vérifier que le point O se trouve à l'intérieur de (S).

b)- Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par O et perpendiculaire à la droite (AB).

Exercice 3

On dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces portent les nombres suivants : $-1;\ -1;\ -1;\ 0;\ 1;\ 1$.

On lance ce dé deux fois de suite et on note le nombre obtenu pour chaque lancer.
On considère les événements suivants :

- A : « Les deux nombres obtenus sont différents »
- B : « La somme des deux nombres obtenus est nulle »
- C : « Les deux nombres obtenus sont différents sachant que leur somme est nulle »

1)- a)- Calculer $p(A)$, $p(B)$ *et* $p(C)$.

b)- En déduire si les événements A et B sont indépendants ou non.

2)- Pour tout entier naturel n, on considère l'événement S_n : « La somme des deux nombres obtenus est égale à n ».

Calculer la probabilité de l'événement S_n suivant les valeurs de n.

Exercice 4

1)- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$.

a)- Déterminer z_1 *et* z_2 les deux solutions de l'équation (E) telles que $\mathrm{Im}(z_1) > \mathrm{Im}(z_2)$.

b)- Ecrire z_1 sous forme trigonométrique puis déduire que $z_1^{\,6} + 64 = 0$.

2)- Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = \sqrt{3} - i$ et $z_C = 2i$.

a)- Ecrire z_{A} sous sa forme exponentielle.

b)- Déterminer l'écriture complexe de la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $3\sqrt{3}-i$.

c)- Soit E l'image de B par la translation T. Déterminer z_{E} l'affixe du point E.

d)- Montrer que les points A, E et C sont alignés.

Exercice 5

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{\frac{-2}{x}}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2)- Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

3)- Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}=0$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

4)- a)- Montrer que $f'(x)=\left(\dfrac{(x+1)^2+1}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

b)- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

5)- a)- Vérifier que $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}}-1\right)=-2$ *et* $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}}-1\right)=-2$.

b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

6)- Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses exactement en deux points dont on déterminera les coordonnées.

7)- Construire la droite (D) et la courbe (C_f). (On admet que (C_f) est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$)

5)- Déterminer graphiquement, selon les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation $(x+m)e^{\frac{2}{x}}-x=1$.

9)- a)- Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2e^{\frac{-2}{x}}$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b)- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ *et* $x=2$.