Exercice 1

1) On pose $P(z)=z^3-7z^2+18z-12$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(1)$.

b) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on a :
$P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1$, $z_B=3-i\sqrt{3}$ et $z_C=3+i\sqrt{3}$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A, z_B et z_C.

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3) a) Calculer le module du nombre complexe $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

4) a) Déterminer z_D affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer le point D.

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $\left|\dfrac{z-1-2i\sqrt{3}}{z-1}\right|=1$.

c) Déterminer z_I affixe du point I milieu du segment $[AD]$ et déterminer la nature du triangle IBC.

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$a=4i,\ b=2\sqrt{3}+2i,\ c=2\sqrt{3}-2i\ et\ d=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

1) Justifier que b^{12} est un nombre réel strictement positif.

2) a) Vérifier que $d=2i-2\sqrt{3}$

b) Montrer que $c-d=2(b-a)$ et que $AD=BC$.

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

3) a) Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)$.

b) Donner l'écriture complexe de la rotation R de centre A qui transforme O en B.

Exercice 3

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^2-2\sqrt{3}Z+4=0$

2/ On considère les nombres complexes :
$a=\sqrt{3}-i;\ b=\bar{a};\ c=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$
$;\ d=\sqrt{2}-\sqrt{6}+i\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$

et $e=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a/ Ecrire sous une forme trigonométrique les nombres complexes a ; b ; c et e

b/ Montrer que :
$a^{24}+b^{24}=2^{24}\quad et\quad que\quad e^{21}=-1$

c/ Vérifier que :
$d=c\times e\ \ et\ \ que\ \ \arg(d)\equiv\dfrac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

d/ Déduire les valeurs exactes de
$\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\ et\ \sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

3/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b.

a/ Vérifier que : $\dfrac{b}{a}=e$

b/ Déduire que le triangle OAB est équilatéral

c/ Déterminer (Δ) l'ensemble des points M d'affixe Z tels que : $\left|Z-\sqrt{3}+i\right|=\left|\bar{Z}-\sqrt{3}+i\right|$

Exercice 4

Soit $Z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1/ a/ Calculer Z^2

b/ Calculer le module et un argument de Z^2

c/ En déduire l'écriture trigonométrique de Z^2

2/ En déduire le module et un argument de Z

3/ En déduire les valeurs exactes de
$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\ et\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 5

On considère le nombre complexe $z=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Montrer que $|z|=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2) Vérifier que $z=1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$.

3) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Montrer que $1+\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha$.

4) Montrer que $z=2\cos^2\frac{\pi}{8}+i\,2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$

(Remarquer que $\sin(2\alpha)=2\cos\alpha\sin\alpha$).

5) Déterminer la forme trigonométrique de z, puis montrer que $z^4=\left(2+\sqrt{2}\right)^2 i$.

6) En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$.

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=2-3i$, $z_B=i$ et $z_C=6-i$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1) Calculer $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.

2) En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M du plan d'affixe z distinct de i, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{i(z-2+3i)}{z-i}$.

1) Soit D le point d'affixe $z_D=1-i$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f.

2) a) Montrer qu'il existe un unique point E dont l'image par f est le point d'affixe $2i$.

b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).

3) Démontrer que pour tout point M distinct de B, on a : $OM'=\frac{AM}{BM}$.

4) Démontrer que pour tout point M distinct des points A et B, on a l'égalité : $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)+\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

5) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6) Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).