Exercice 1

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = -x^3 + 6x^2 + 10x - 4$; 2) $f_2(x) = 5x\left(x^2+1\right)^6$

3) $f_3(x) = (2x-1)\left(x^2 - x + 4\right)^3$; 4) $f_4(x) = (5-2x)^4$

5) $f_5(x) = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x-3\right)^2}$; 6) $f_6(x) = \dfrac{3}{(5x-1)^4}$

7) $f_7(x) = \dfrac{3x}{\left(x^2+5\right)^6}$; 8) $f_8(x) = \dfrac{2x^5 - x^3 + 3x^2 + 2}{x^2}$

9) $f_9(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$; 10) $f_{10}(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$

11) $f_{11}(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; 12) $f_{12}(x) = \dfrac{\ln^3 x}{2x}$

13) $f_{13}(x) = \sin x \cos^2 x$; 14) $f_{14}(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

15) $f_{15}(x) = (2x-3)e^{x^2-3x}$; 16) $f_{16}(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^4 x^4 dx$; $I_2 = \int_0^1 (x^2+3x+2)dx$; $I_3 = \int_1^2 \dfrac{1}{x^4}dx$;

$I_4 = \int_1^2 x^{\frac{3}{2}}dx$; $I_5 = \int_1^2 \sqrt[4]{x^3}dx$; $I_6 = \int_1^2 x^{-\frac{2}{3}}dx$.

2) $J_1 = \int_0^1 \dfrac{1}{x+1}dx$; $J_2 = \int_0^1 \dfrac{1}{2x+1}dx$; $J_3 = \int_0^1 \dfrac{x}{x^2+1}dx$;

$J_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x}{\sin x}dx$; $J_5 = \int_0^1 \dfrac{x^2}{x^3+2}dx$; $J_6 = \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}dx$;

$J_7 = \int_0^1 \dfrac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx$; $J_8 = \int_{\sqrt{e}}^e \dfrac{1}{x\ln x}dx$.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1) $K_1 = \int_1^2 \dfrac{x+1}{x}dx$; $K_2 = \int_0^1 \dfrac{x^2+3x+2}{x+2}dx$;

$K_3 = \int_0^1 \dfrac{2x-1}{x+1}dx$; $K_4 = \int_0^1 \dfrac{2}{(x+1)(x-3)}dx$;

$K_5 = \int_0^1 \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}dx$; $K_6 = \int_{-1}^0 \dfrac{2x-1}{(x-1)(x+3)}dx$; $K_7 = \int_0^1 \dfrac{x+1}{x^2+5x+6}dx$; $K_8 = \int_0^1 \dfrac{3}{x^2+3x+2}dx$;

$K_9 = \int_0^1 \dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x+3}dx$; $K_{10} = \int_1^2 \dfrac{1-x}{x(x^2-9)}dx$.

2) $L_1 = \int_0^1 -\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$; $L_2 = \int_0^1 -\dfrac{3x^2+2x+1}{\left(x^3+x^2+x+2\right)^2}dx$;

$L_3 = \int_0^1 \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+3\right)^2}dx$; $L_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$;

$L_5 = \int_0^1 -\dfrac{2e^x}{\left(e^x+2\right)^2}dx$; $L_6 = \int_{\sqrt{e}}^e \dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$;

$L_7 = \int_0^1 \dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}dx$; $L_8 = \int_1^2 \dfrac{3}{\sqrt{x^3}}dx$.

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

1) $M_1 = \int_0^1 \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$; $M_2 = \int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

$M_3 = \int_0^1 \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2+3}}dx$; $M_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$;

$M_5 = \int_1^e \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}dx$; $M_6 = \int_e^{e^2} \dfrac{1}{x\sqrt{2+\ln x}}dx$.

2) $N_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^2 dx$; $N_2 = \int_0^1 x(x^2+1)^5 dx$;

$N_3 = \int_1^e \dfrac{(\ln x)^4}{x}dx$; $N_4 = \int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 dx$;

$N_5 = \int_0^{\ln 2} e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)^3 dx$.

3) $P_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)dx$; $P_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)dx$;

$P_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x dx$; $P_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$;

$P_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$; $P_6 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx$; $P_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;

Exercice 5

En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x dx$; $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$; $I_3 = \int_1^{e} x\ln x dx$;

$I_4 = \int_1^{e} \ln x dx$; $I_5 = \int_1^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; $I_6 = \int_0^{1} x\ln(x+1) dx$;

$I_{11} = \int_0^{1} xe^{x} dx$; $I_{12} = \int_0^{1} xe^{2x-1} dx$; $I_{13} = \int_{-\ln 2}^{0} (x+1)e^{-x} dx$;

$I_{14} = \int_0^{\ln x} (x^2+1)e^{2x} dx$; $I_{15} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$; $I_{16} = \int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\ln(1+2e^{x}) dx$.

$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right) dx$; $I_8 = \int_0^{1} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx$;

$I_9 = \int_0^{1} (2x+3)\ln(x+1) dx$; $I_{10} = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2} dx$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

1) $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x\sin x\, dx$ 2) $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\, dx$

3) $J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x\, dx$ 4) $J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

5) $J_5 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\, dx$ 6) $J_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$

7) $J_7 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\sin^2 x\, dx$ 8) $J_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 x\, dx$

.

Exercice 7

Calculer l valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \ln(2x)$ et $I = [1,e]$

2) $f(x) = e^{-x}$ et $I = [0,1]$

3) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ et $I = [1,3]$ et montrer que

$$(e+1)\ln 2 \leq \int_1^2 \frac{e^x+1}{x} dx \leq (e^2+1)\ln 2$$

Exercice 8

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[1,2]$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{e^x-1} \text{ et } g(x) = x.$$

1) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$, $f(x) > g(x)$.

2) Calculer en unité d'aire puis en cm², l'aire du domaine plan délimité par la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. (Le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthogonal tel que $\|\vec{i}\| = 3cm$ et $\|\vec{j}\| = 2cm$)

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x}$.

1) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{4}(2x^2-2x+1)e^{2x}$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x^2 e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe représentative de f sur $[0,1]$, autour de l'axe des abscisses exprimé en u.v. puis en cm³.(O donne $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

Exercice 10

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x+3+\frac{2(1-\ln x)}{\sqrt{x}}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la droite (D): $y = x+3$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2) Etudier la position relative de (C_f) et (D).

3) Déterminer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$