Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + x\ln^2(x)\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2(x) = 0$.

(On pourra poser $t=\sqrt{x}$)

b) Déduire que la fonction f est continue à droite en $x_0 = 0$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter ce résultat graphiquement.

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

4) a) Montrer que $\forall x>0 :\ f'(x) = (1+\ln x)^2$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

5) Montrer que le point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

6) a) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b) Montrer que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite d'équation $(\Delta):\ y=x$.

7) Tracer dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les droites (T), (Δ) et la courbe (C_f).

8) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{e} \\ u_{n+1} = f(u_n);\ n\in\mathbb{N} \end{cases}.$$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N} :\ \dfrac{1}{e} \le u_n \le 1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie sur $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{\ln x} - \dfrac{1}{\ln^2 x}\ ;\ x\in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ et interpréter ce résultat graphiquement.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat obtenu graphiquement.

3) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

4) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter ce résultat graphiquement.

5) Montrer que

$$\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[:\ f'(x) = \frac{2}{x\ln^2 x}\left(\frac{1-\ln x}{\ln x}\right).$$

6) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]1;e]$ et est strictement décroissante sur $[0;1[$ et sur $[e;+\infty[$.

7) a) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

b) Construire la courbe (C_f) et la droite (T) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

8) Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]1;e]$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle $]-\infty;1]$.

b) Montrer que la fonction h^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $\left(h^{-1}\right)'(0)$

Exercice 3

A – Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-x+1-\ln x$.

1) Montrer que $\forall x>0 : g'(x)=\frac{2x+1}{x}(x-1)$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3) Déduire que $\forall x>0 : g(x)>0$.

B – Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln x$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$ et interpréter ce résultat graphiquement.

3) Montrer que la courbe (C_f) est en dessous de la droite (Δ) d'équation $y=x$.

4) a) Montrer que $\forall x>0 : f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c) Donner l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

5) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α tel que $\frac{1}{e}<\alpha<1$.

6) Construire dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la droite (Δ) et la courbe (C_f).

7) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e \ln(x)\,dx=1$.

b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$.

8) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 1 et que $\left(f^{-1}\right)'(1)=1$.

C – Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)/\ n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N} : u_n>1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4

I – On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x-1$.

1) a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) Déterminer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ puis déduire que la fonction g est décroissante sur $]0;+\infty[$.

2) Calculer $g(1)$ et donner le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

3) a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$.

II – Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique dont il faut préciser la direction.

2) a) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f(x)-x=g(x)$$

b) En déduire que pour tout x de $]1;+\infty[$: $f(x)<x$.

3) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{2x(x+1)^2}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

c) Construire dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C_f) et la droite Δ d'équation $y=x$.

d) Montrer que l'équation $(x+1)\ln(\sqrt{x})=x^2-2019x-2018$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;+\infty[$.

III – On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=2$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>1$.

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire que $u_n\in]1;2]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5

I –

1) Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x-1-\ln x$.

a) Etudier les variations de la fonction h.

b) En déduire que $h(x)\geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

2) On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-\ln x-\frac{1}{x}$.

a) Vérifier que $g(x)=h(x)+\frac{x-1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Déduire que $g(x)\geq 0$ pour tout x de $[1;+\infty[$.

c) Montrer que $g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

d) Déduire que $g(x)\leq 0$ pour tout x de $]0;1]$.

II – On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=-\ln^2(x)+x+\frac{1}{x}-1$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=0$ (On pourra poser $t=\sqrt{x}$)

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

(Remarquer que $\forall x>0$: $f(x)=x\left(\frac{-1}{2}\frac{\ln^2 x}{x}+1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$)

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) En déduire que $\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$ (On pourra poser $t=\frac{1}{x}$)

3) a) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) On pose $\varphi(x)=x-f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

a) Montrer que $\varphi'(x)=\frac{1+h\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) En déduire que la fonction φ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c) Calculer $\varphi(1)$ puis montrer que $\varphi(x)\geq 0$ pour tout x de $[1;+\infty[$ et que $\varphi(x)\leq 0$ pour tout x de $]0;1]$.

d) En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y=x$.

e) Construire dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C_f)

et la droite (D).

5) a) Montrer que la fonction $U : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $u : x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e \ln^2(x)\,dx = e-2$.

c) Calculer en cm², l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

III – On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = f(u_n) / n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1) Montrer que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de la question II – 4) c))

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6

I – On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$.

1) Montrer que $g'(x) = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

2) En déduire les variations de la fonction g.

3) Déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

II – Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x} + \dfrac{\ln x}{x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D).

c) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1,

d) Construire la courbe (C_f) et les droites (D) et (T) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

c) Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $w_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.