Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x+2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) & ;\ x<0 \\ f(x)=\left(x-2\sqrt{x}\right)e^{\sqrt{x}} & ;\ x\geq 0 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm

1/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b/ Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c/ Etudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

2/ a/ Montrer que la fonction f est continue en $x_0=0$

b/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0=0$ et donner une interprétation graphique au résultat

3/ a/ Montrer que :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right);\ \begin{cases} f'(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x(x-1)} & ;\ x<0 \\ f'(x)=\left(\dfrac{x-2}{2\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x}} & ;\ x>0 \end{cases}$$

b/ Etudier le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

4/ a/ Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ)

b/ Construire la courbe (C_f) (On prendra $ln2\simeq 0,7$; $\sqrt{2}\simeq 1,4$; $e^{\sqrt{2}}\simeq 4,1$)

5/ a/ En utilisant une intégration par partie, calculer l'intégrale $\int_{-2}^{-1}\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)dx$

b/ En déduire , en cm^2, l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations $y=x$, $x=-2$ et $x=-1$

Exercice 2

Partie 1 :

On considère la fonction g définie par

$g(x)=x-1+2\ln x;$ avec $x\in\,]0,+\infty[$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) Montrer que $g'(x)=\dfrac{x+2}{x}$ et en déduire les variations de g

3) Calculer $g(1)$ et en déduire que $\forall x\in\,]0,1]$ $g(x)\leq 0$ et que $\forall x\in[1,+\infty[$ $g(x)\geq 0$

Partie2 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=x-2+(\ln x)^2-\ln x$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\|\vec{i}\|=1cm$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (poser $t^2=x$) et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

c) En déduire que (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

2) montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

3) a) montrer que : $\left(\forall x\in\,]0,+\infty[\right)$ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

b) en déduire le tableau de variation de f

4) Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ).

5) montrer que l' equation $f(x)=0$ admet deux solution $\alpha\in\left]1,\dfrac{1}{e}\right[$ et $\beta\in\left]2,\dfrac{9}{4}\right[$

6) montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion

7) verifier que $y = x - \frac{9}{4}$ est l équation de la tangente (T) au point d abscisse $x_0 = e^{\frac{1}{2}}$.

8) tracer la droite (Δ) ,la tangente (T) et la courbe (C_f) dans le repere $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x$, et la suite (u_n) définie par :

$u_0 = \frac{7}{4}$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) Etudier les variations de la fonction g

b) Montrer que : $(n \in \mathbb{N})$, $\sqrt{e} \leq u_n \leq 2$

2) a) Etudier le signe de $g(x) - x$ sur $]0;+\infty[$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente

b) Calculer la limite de (u_n)

Exercice 4

Partie I :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x) = e^x + 2lnx$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

c) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations

2) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$ et que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$

b) Démontrer que : $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0,\alpha]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[\alpha,+\infty[$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x + 2xlnx - 2x \,;\, x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (l'unité graphique : 4cm)

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus

2) a) Montrer que f est continue en 0 à droite

b) Calculer $\lim \frac{f(x)-f(0)}{x}$

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

b) Etudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations

4) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ (on prend : $\alpha \approx 0{,}45$ et on admet que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des Abscisses en deux points d'abscisse 0,3 et 0,6)

5) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^2 xlnx = 2ln2 - \frac{3}{4}$$

b) Calculer en cm², l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$ par : $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et que pour tout x de $\left]0;+\infty\right[$ on a : $f'(x)=\dfrac{1}{2\left(x+\sqrt{x}\right)}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, puis donner une interprétation graphique à ce résultat.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

d) Dresser le tableau de variation de f.

e) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

f) Montrer que $\forall x\in J,\ f^{-1}(x)=\left(e^x-1\right)^2$

2) On pose $I=\left[\dfrac{1}{4};1\right]$.

a) Montrer que pour tout $x\in I,\ f'(x)\le\dfrac{2}{3}$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans l'intervalle I et que $\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{3}{4}$.

3) Construire les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4) On considère la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1$ *et* $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|u_n-\alpha\right|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

c) En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

d) Soit $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, par : $v_n=f^{-1}\left(u_n\right)$.

Montrer que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.