Exercice 1

1) Soient x et y deux nombres réels tels que : $|2x-y|\leq 2$ et $1\leq y\leq 4$.

a) Montrer que $-\dfrac{1}{2}\leq x\leq 3$

b) Encadrer les nombres : $4x-3y$; xy ; $\sqrt{x^2+y^2}$

2) Calculer $A=\left|3\sqrt{2}-4\right|+2\left|\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right|-\left|2\sqrt{5}-7\sqrt{2}\right|$

3) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que $1+\sqrt{1+a}>2$

b) Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$

c) En déduire que la valeur de la somme $S=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$:

a) l'équation $|-2x+1|=|x-3|$

b) l'inéquation $\left|\dfrac{1}{x}-2\right|\leq 3$

Exercice 2

Soit x un nombre réel tel que : $|2x-1|<\dfrac{1}{3}$. On pose $B=\dfrac{1}{1+9x^2}$.

1) Montrer que $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}$ puis déduire un encadrement du nombre $\dfrac{1}{x}$.

2) Montrer que $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{9}{4}\right|<\dfrac{3}{4}$ et déduire une valeur approchée de $\dfrac{1}{x}$ en indiquant sa précision.

3) a) Montrer que $\dfrac{1}{5}<B<\dfrac{1}{2}$

b) En déduire une valeur approchée de B avec la précision de $\dfrac{3}{20}$

https://www.dimamath.com
MATHÉMATIQUES POUR TOUS

Exercice 3

1) Factoriser les expressions suivantes : $E=8x^3-27$; $F=64x^3+125$; $G=x\sqrt{x}-1$

2) a) Simplifier le nombre $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

b) Calculer le nombre $\dfrac{5\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$

Exercice 4

1) a) Comparer les nombres $2\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ puis les nombres $\dfrac{1}{5-2\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{5-\sqrt{7}}$

b) Développer le carré $\left(\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right)^2$.

c) En déduire la valeur de $\alpha=\sqrt{15-4\sqrt{14}}$.

2) Factoriser les expressions suivantes :

$H=x^2+x-2$; $I=-3x(x+3)+x^3+27$; $J=(3x+4)^2+(3x+4)\left(x+\sqrt{2}\right)+3x+4$;

$K = x^3 - 8 - 4(x-2) + x^2 - 2x$; $L = 8x^4 - 27x - 4x^2(2x-3)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $N = \dfrac{12^{2n} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n}{6^{3n-1}}$. Montrer que $N \in \mathbb{N}$

Exercice 5

1) Soit x et y deux nombres réels tels que : $-2 \leq x \leq 2$ et $3 \leq y \leq 5$.

Donner un encadrement des nombres suivants : $x+y$; $x-y$; xy ; $\dfrac{x}{y}$; x^2 ; y^2 ; $\dfrac{x^2}{y^2+1}$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^*$, on pose : $x = a + \dfrac{1}{a}$.

a) Vérifier que $a^2 + \dfrac{1}{a^2} = x^2 - 2$.

b) Exprimer $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$ et $a^4 + \dfrac{1}{a^4}$ en fonction de x.

Exercice 6

1) Soient x et y deux nombres réels. Montrer que :

a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$ b) $(x+y)^2 \geq 4xy$ c) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$

2) Soient x et y deux nombres réels strictement positifs. Montrer que :

a) $x + y \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}$ b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$

3) Soient a et b deux réels tels que : $a \geq -2$, $b \leq -1$ et $a - b = 6$

a) Ecrire le nombre $\alpha = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(b+1)^2}$ sans radicaux

b) Montrer que $a \in [-2;5]$ et $b \in [-8;-1]$

c) Donner la valeur de $\beta = |a+b-4| + |a+b+10|$ sans valeur absolue.

4) On considère les intervalles : $I = [0;3]$; $J = [-5;1]$ et $K =]5;+\infty[$.

Déterminer $I \cap J$; $I \cup J$; $I \cap K$; $I \cup K$; $I \cap J \cap K$ et $I \cup J \cup K$

Exercice 7

Soient x et y deux nombres réels tels que : $x \in [-1;3]$ et $\left(\dfrac{1}{2}y - 1\right) \in \left[-\dfrac{1}{2};0\right]$.

On pose $\omega = x^2 - y^2 + 3x + 3y$.

1) a) Montrer que $1 \leq y \leq 2$

b) Encadrer x^2, y^2, $3x$ et $3y$

c) Donner un encadrement de ω en précisant son amplitude.

2) a) Vérifier que $\omega = (x+y)(x-y+3)$

b) Donner un autre encadrement de ω en précisant son amplitude.

3) Parmi les deux encadrements de ω, quel est le meilleur encadrement ?

Exercice 8

Soient a et b deux nombres réels tels que : $\dfrac{1}{2} \leq a \leq 4$ et $0 \leq b \leq \dfrac{1}{2}$.

On pose $\beta = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$.

1) a) Montrer que $\beta^2 = 2(a+b)$

b) Simplifier le nombre β

c) Calculer le nombre $\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}$

2) a) Encadre $a+b$

b) En déduire un encadrement de β

Exercice 9

Soit x un nombre réel non nul. On pose $A=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

1) Montrer que : $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

2) a) Montrer que : $\sqrt{1+x^2}+1>2$

b) En déduire que $\left|A-\dfrac{1}{x}\right|<\dfrac{1}{2}|x|$

3) Déterminer une valeur approchée du nombre $\dfrac{\sqrt{1,0001}}{0,01}$ d'amplitude 5.10^{-3}.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$a)\ |x-2|=5$; $b)\ |3x+11|=5$; $c)\ |7x-2|=|3x+5|$; $d)\ |2x+3|\leq 4$; $e)\ |-2x+5|>3$

https://www.dimamath.com

MATHÉMATIQUES POUR TOUS