

I – Ensemble des nombres complexes

1 – Vocabulaires et notations

Théorème : (admis)

Il existe un ensemble, appelé ensemble des nombres complexes et noté \mathbb{C} , vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Il existe dans \mathbb{C} un élément noté i tel que : $i^2 = -1$
- L'ensemble \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication, qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans \mathbb{R}
- Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit d'une façon unique sous la forme $a + ib$ où a et b sont deux réels.
Autrement dit : $(\forall z \in \mathbb{C})(\exists!(a; b) \in \mathbb{R}^2); z = a + ib$

Définition

- L'écriture $z = a + ib$ où a et b sont deux réels, est appelée **l'écriture algébrique** ou la **forme algébrique** du nombre complexe z
- Le réel a est appelé **la partie réelle** du nombre complexe z et est noté **Re(z)**
- Le réel b est appelé **La partie imaginaire** du nombre complexe z et est noté **Im(z)**
- Lorsque $\text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) \neq 0$, le nombre complexe z est dit **imaginaire pur** (on note aussi que $z \in i\mathbb{R}$)

Remarques

- On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{C} = \{z = x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Proposition

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes tels que a, b, a' et b' sont des réels. Alors :

- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

SMAIL
El jaafari
<https://www.dimamath.com>

Exemples:

Déterminer les réels x et y tels que :

$$1) x - 2 + i(2x + y - 1) = 0; 2x + y - 1 + i(x + 1 - 2y) = 0; 3 - 2x + 5i = 2 - i(y + 3);$$

$$2x + 3 + i(y - 5) \in \mathbb{R}; x^2 - 4 + i(x^2 - x - 2) \in i\mathbb{R}$$

2 - Règles de calcul dans \mathbb{C}

Proposition 1

Soit a, a', b, b' et k des nombres réels. Alors :

<https://www.dimamath.com>

- $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
- $(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $k(a + ib) = ka + ikb$
- Si $a + ib \neq 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) alors $\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Proposition 2

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1$ et $i^{4n+3} = -i$
- $z^3 - z'^3 = (z - z')(z^2 + zz' + z'^2)$ et $z^3 + z'^3 = (z + z')(z^2 - zz' + z'^2)$

Remarque:

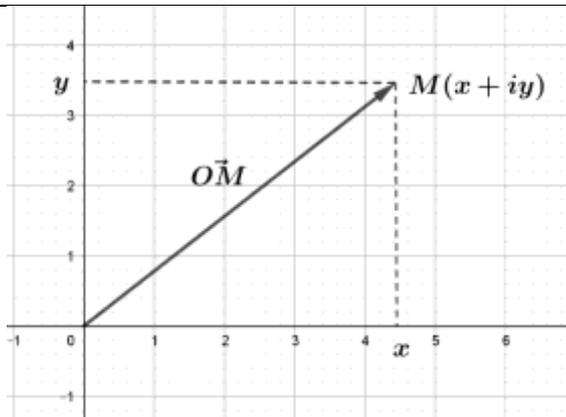
Tous les calculs que l'on peut effectuer dans \mathbb{R} , on peut les effectuer de la même manière dans \mathbb{C} , sauf ce qui est lié à la relation d'ordre qui ne s'applique pas dans \mathbb{C}

3 – Représentation géométrique d'un nombre complexe

Théorème et définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- A chaque nombre complexe $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, correspond un unique point $M(a, b)$ du plan. Le point $M(a, b)$ est appelé l'image de $z = a + ib$, on le en général $M(z)$
- A chaque point $M(a, b)$ du plan où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, correspond un unique nombre complexe $z = a + ib$, appelé l'affixe du point $M(a, b)$ et est noté z_M ou $\text{aff}(M)$



SMAIL
El jaafari
<https://www.dimamath.com>

Vocabulaires:

- ★ Le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé **le plan complexe**
- ★ L'axe des abscisses est appelé **l'axe des réels**
- ★ L'axe des ordonnées est appelé **l'axe des imaginaires**

Définition

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points du plan complexe et I le milieu du segment $[AB]$ et G le centre de gravité du triangle ABC . Alors :

- L'affixe du point I est le nombre complexe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

<https://www.dimamath.com>

- L'affixe du point G est le nombre complexe $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$
- L'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Proposition1

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ et α et β deux réels. Alors :

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$
- $\text{aff}(\alpha\vec{u}) = \alpha \times \text{aff}(\vec{u})$
- $\text{aff}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha \times \text{aff}(\vec{u}) + \beta \times \text{aff}(\vec{v})$

Proposition2

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ABCD est un parallélogramme
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu
- $z_B - z_A = z_C - z_D$

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = 3 + i$, $z_C = 3i$ et $z_D = -2 + i$

1/ Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$

2/ Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

3/ Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[AC]$. Déterminer les affixes de I et de J.

Proposition 3

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ et soit

$A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points du plan complexe distincts deux à deux.

Alors :

- \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}} \in \mathbb{R}$
- Les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

SMAIL
Eljaafari
<https://www.dimamath.com>

Exercice

1/ Soit \vec{u} et \vec{v} les vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}} = 6 + 4i$ et $z_{\vec{v}} = 3 + 2i$. Etudier la colinéarité des vecteurs \vec{u} et \vec{v}

<https://www.dimamath.com>

2/ Soit $M(4i)$, $N(4)$ et $P(6-2i)$ trois points du plan complexe. Montrer qu'ils sont alignés.

Proposition 4

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.

Alors :

$$1/ \text{ Le triangle ABC est rectangle en A } \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^* \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est un imaginaire pur} \right)$$

$$2/ \text{ Les droites } (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont perpendiculaires } \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

II – Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$

Proposition 1

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z \times \bar{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$

SMAIL
El jaafari
<https://www.dimamath.com>

Proposition 2:

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

- $z \in \mathbb{R}$ (z est un réel) $\Leftrightarrow \bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}^*$ (z est un imaginaire pur) $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Proposition 3:

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\overline{(z + z')} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{(z \times z')} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$
- $\overline{(\lambda z)} = \lambda(\bar{z})$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, Alors :

- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{(\bar{z})^n}$

Exercice 1

1/ Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

<https://www.dimamath.com>

$$z_1 = 3 + 2i; z_2 = 5i - 2; z_3 = -3i + 6; z_4 = (1 - 2i)^5; z_5 = \frac{3 + 5i}{1 - 2i}; z_6 = 3i(\sqrt{3} - 2i) - 2(i - 2)$$

2/ Résoudre dans \mathbb{C} , les équations suivantes :

$$a / (2 + 3i)z = 1 - 2i; b / 2iz + 1 + 3i = 3z - i + 2; c / 2z - (2 - i)\bar{z} + 1 - 2i = 0; d / \frac{2z - i}{2 - i\bar{z}} = 3 + i$$

$$e / (2z - 3 + iz + 5i)((1 + 3i)z - 2\bar{z} + 2i) = 0$$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1/ Déterminer et construire, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z + \bar{z} = 2$.

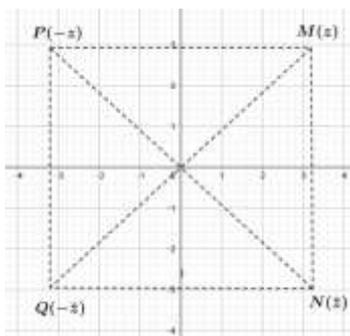
2/ Déterminer et construire, l'ensemble des points N d'affixe z tels que $z - \bar{z} = 4i$

3/ Soit a et b deux réels tels que $b \neq 0$. On pose $Z = (a + bi)^n + (a - bi)^n$ et $Z' = (a + bi)^n - (a - bi)^n$ où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Z est un réel et que Z' est un imaginaire pur.

Remarque

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe. Soit

$N(\bar{z})$, $P(-z)$ et $Q(-\bar{z})$, alors $M(z)$ et $N(\bar{z})$ d'une part et $P(-z)$ et $Q(-\bar{z})$ d'autre part sont symétriques par rapport à l'axe des réels



SMAIL
Eljaafari
<https://www.dimamath.com>

Proposition 4

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors:

- $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$
- $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$

Exercice

Soit $P(z) = z^4 - 2z^3 - 2z^2 + 2z + 10$

1/ Vérifier que les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 + i$ sont des racines de $P(z)$

2/ Déterminer toutes les racines de $P(z)$

III – Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe tel que a et b sont des réels.

On appelle le module du nombre complexe z , le nombre réel positif noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposition 1

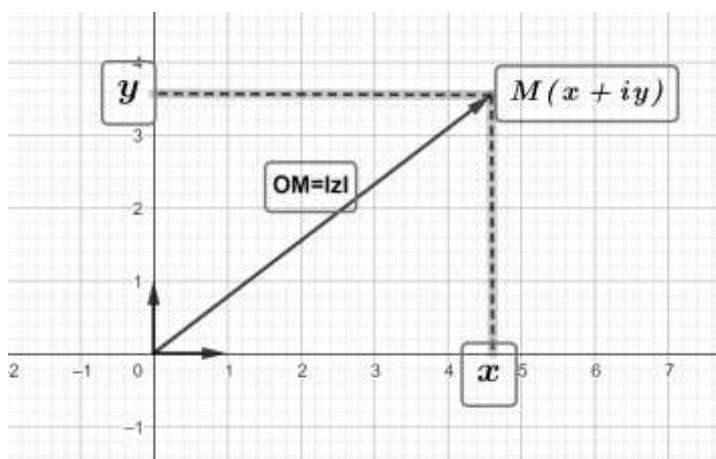
- $(\forall z \in \mathbb{C}); |z| \in \mathbb{R}^+$

- $(\forall z \in \mathbb{C}); |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- Si $z \in \mathbb{R}^+$ alors $|z| = \mathcal{R}e(z)$ et si $z \in \mathbb{R}^-$ alors $|z| = -\mathcal{R}e(z)$
- Si $z \in i\mathbb{R}^+$ alors $|z| = \mathcal{I}m(z)$ et si $z \in i\mathbb{R}^-$ alors $|z| = -\mathcal{I}m(z)$
- Soit $z = x + iy$ où x et y sont des réels ; alors $|z|^2 = z \times \bar{z} = x^2 + y^2$
- Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z \neq 0$. Alors $\frac{z'}{z} = \frac{z' \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{z' \times \bar{z}}{|z|^2}$

Interprétation graphique du module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe et soit $M(z)$ son image dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $OM = |z|$.

SMAIL
El jaafari
<https://www.dimamath.com>



Proposition

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(z_A)$ et $B(z_B)$. Alors :

* $OA = \|\vec{OA}\| = |z|$

* $AB = \|\vec{AB}\| = |z_B - z_A|$

Exercice1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

1/ $|z| = 2$; 2/ $|z - 1 + 3i| = \frac{3}{2}$; 3/ $|\bar{z} + 2 - i| = 3$; 4/ $|2z - 4 - 3i| = 4$; 5/ $|z| = |z - 2|$;

6/ $|z - 2 + 3i| = |z + 1 - 2i|$; 7/ $|z + 3 - i| = |\bar{z} - 2i|$; 8/ $|2 - 5i + 3\bar{z}| = |2i + 3 - 3z|$; 9/ $\frac{z - i}{z + 1} \in i\mathbb{R}$

10/ $\frac{2z - i}{z + 1} \in \mathbb{R}$

Exercice2

<https://www.dimamath.com>

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2 + i$; $z_B = 2 + 3i$; $z_C = -i$; $z_D = 1 - 2\sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$ et $z_E = -3i$

1/ Montrer que le triangle ABC est isocèle

2/ Montrer que le triangle BCD est équilatéral

3/ Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $Z = \frac{z_E - z_A}{z_B - z_A}$, et en déduire la nature du triangle

ABE

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|\bar{z}| = |-z| = |z| = |i z| = \left| \frac{z}{i} \right|$
- $|z|^2 = |\bar{z}^2| = z \times \bar{z}$ et $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$
- $|z^n| = |z|^n$ ($n \in \mathbb{N}$)
- Si $z \neq 0$, on a : $|z^n| = |z|^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $\left| \frac{1}{z^n} \right| = \frac{1}{|z|^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)
- Si $z \neq 0$, on a : $\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}$
- Si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$
- Si $k \in \mathbb{R}^+$, on a : $|k \times z| = k \times |z|$ et $|-k \times z| = k \times |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (l'inégalité triangulaire des nombres complexes)
- En général : $\left| \sum_{k=0}^{k=n} z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{k=n} |z_k|$ pour tout entier naturel n et pour tout nombre complexe

z_0, z_1, \dots, z_n

SMAIL
El jaafari
<https://www.dimamath.com>

IV – Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

1 – Argument d'un nombre complexe non nul

Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

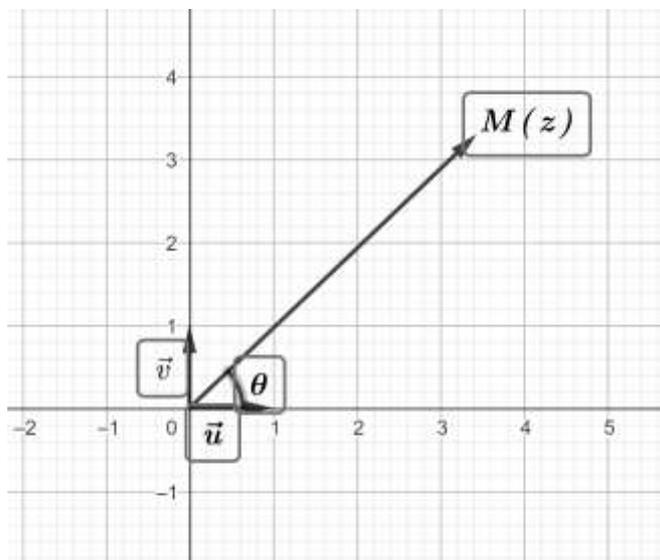
On appelle argument de z et on note $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Remarques

- Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, alors $\theta + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, est aussi une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

<https://www.dimamath.com>

- Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, On note $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.
- En général, on prend $\theta \in]-\pi, \pi]$ (mais ce n'est pas obligatoire)
- Le nombre complexe 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument



Proposition 1

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, alors il existe au

moins un réel θ tel que

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{où } \arg z \equiv \theta [2\pi]$$

2 – Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z , s'écrit sous la forme $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ où θ est un argument de z .

L'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée **écriture trigonométrique** ou **forme trigonométrique** du nombre complexe z

On la note aussi : $z = [|z|, \theta]$

Définition (coordonnées polaires)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ d'image le point M dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , tel que $r = OM$ et $\arg z \equiv \theta [2\pi]$.

Le couple (r, θ) est appelé **le couple de coordonnées polaires** du point M par rapport à l'axe polaire (O, \vec{u})

Proposition 1

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ où $r > 0$, alors $\begin{cases} |z| = r \\ \arg z \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$

Proposition 2

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors :

- ❖ $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ❖ $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \arg z = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ❖ $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow \arg z = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ❖ $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ❖ $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ❖ $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exercice

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ d'affixes z tels que :

- | | |
|---|---|
| 1) $\text{Im } z = 0$
2) $\text{Re}(z) = 0$
3) $\begin{cases} \text{Im } z = 0 \\ \text{Re}(z) > 0 \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} \text{Im } z < 0 \\ \text{Re}(z) = 0 \end{cases}$ |
|---|---|

Méthodes pratiques

① Méthode 1:

Si $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

1- On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2- On détermine $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

② Méthode 2:

- Si $\begin{cases} z = \lambda(\cos \theta + i \sin \theta) \\ \lambda > 0 \end{cases}$ alors $z = [\lambda, \theta]$
- Si $\begin{cases} z = \lambda(\cos \theta + i \sin \theta) \\ \lambda < 0 \end{cases}$ alors $z = [-\lambda, \theta + \pi]$

Exercice

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = -3 + i\sqrt{3}$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$$

$$z_4 = -21 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

Proposition 3

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$. Alors :

$$\begin{aligned} \diamond & \begin{cases} |\bar{z}| = |z| \\ \arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi] \end{cases} & \text{et } \bar{z} = [r, -\theta] \\ \diamond & \begin{cases} |-z| = |z| \\ \arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi] \end{cases} & \text{et } -z = [r, \pi + \theta] \\ \diamond & \begin{cases} |z \times z'| = |z| \times |z'| \\ \arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi] \end{cases} & \text{et } z \times z' = [r \times r', \arg z + \arg z'] \\ \diamond & \begin{cases} \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \\ \arg \left(\frac{1}{z} \right) \equiv -\arg z [2\pi] \end{cases} & \text{et } \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\arg z \right] \\ \diamond & \begin{cases} \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} \\ \arg \left(\frac{z'}{z} \right) \equiv \arg z' - \arg z [2\pi] \end{cases} & \text{et } \frac{z'}{z} = \left[\frac{r'}{r}, \theta' - \theta \right] \\ \diamond & \begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \arg(z^n) \equiv n \times \arg z [2\pi] \end{cases} & \text{et } z^n = [r^n, n \times \theta] \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Remarque

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls tels que $z + z' \neq 0$. Alors l'égalité $\arg(z + z') = \arg z + \arg z'$ est fausse généralement

Exercice

Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (\sqrt{3} - i)(2 + 2i)(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$z_1 = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(2 - 2\sqrt{3}i)(\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$z_3 = 2i \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$$

SMAIL
Eljaafari
<https://www.dimamath.com>

3 – Mesure d'angle de vecteurs et argument des nombres complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Proposition1

Soit \vec{w} et \vec{t} deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{t}}$ et soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

- ❖ $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv \arg(z_{\vec{w}}) [2\pi]$
- ❖ $(\vec{u}, \overline{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$
- ❖ $(\vec{w}, \vec{t}) \equiv \arg\left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}}\right) [2\pi]$
- ❖ $(\overline{AB}, \overline{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

Proposition2

Soit \vec{w} et \vec{t} deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{t}}$ et soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

- ❖ \vec{w} et \vec{t} deux vecteurs colinéaires $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \in \mathbb{R}$
- ❖ $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- ❖ $\vec{w} \perp \vec{t} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \in i\mathbb{R}$
- ❖ $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
- ❖ Les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$

SMAIL
El jaafari
<https://www.dimamath.com>

Proposition3

Soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . Alors :

- ❖ ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$
- ❖ ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$
- ❖ ABCD est un losange $\Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \left|\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \end{cases}$
- ❖ ABCD est un carré $\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Proposition 4

Soit $A, B,$ et C des points du plan complexe d'affixes respectives $z_A, z_B,$ et z_C . Alors :

- ❖ $A, B,$ et C des points alignés $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- ❖ ABC est un triangle isocèle en $A \Leftrightarrow \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A|$
- ❖ ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A| = |z_C - z_B|$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} |z_C - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$
- ❖ ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$
- ❖ ABC est un triangle rectangle et isocèle en $A \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$

V – Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul**1 – Forme exponentielle d'un nombre complexe****Définition 1**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ , autrement dit :
 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Exemples

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$
- $e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

SMAIL
El jaafari
<https://www.dimamath.com>

Définition 2

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ c-à-d :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

L'écriture $r e^{i\theta}$ est appelée l'écriture **exponentielle** ou la **forme exponentielle** du nombre complexe z .

Proposition

Soit θ et θ' deux réels quelconques. Alors :

- ❖ $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta [2\pi]$
- ❖ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- ❖ $e^{-i\theta} = \overline{(e^{i\theta})} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta$
- ❖ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- ❖ $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$
- ❖ $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
- ❖ $e^{i\alpha} + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\alpha+\theta}{2}} \cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$
- ❖ $e^{i\alpha} - e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\alpha+\theta+\pi}{2}} \sin\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$
- ❖ $1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
- ❖ $1 - e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta-\pi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

**2 – Formules de Moivre et d'Euler**Proposition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- ❖ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ou $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ [Formule de Moivre]
- ❖ $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ [Formules d'Euler]

Exemples

- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$
- $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ et $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$

3 – linéarisation de $\cos^n(\theta)$, $\sin^n(\theta)$, $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$ Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Linéariser $\cos^n(\theta)$, $\sin^n(\theta)$, $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$ revient à écrire ses expressions sous

$$\sum_{k \leq n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Exemples

1) Linéariser $\cos^2 x$

Pour cela on sait que $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, d'après les formules d'Euler

<https://www.dimamath.com>

$$\text{Donc } \cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{e^{i2x} + e^{-i2x} + 2}{4} = \frac{2\cos(2x) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\text{D'où } \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

2) Linéariser $\cos^3 x$

$$\begin{aligned} \text{On a } \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}}{8} = \frac{(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})}{8} \\ &= \frac{\cos(3x) + 3\cos x}{4} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \cos^3 x = \frac{\cos(3x) + 3\cos x}{4}$$

3) Linéariser $\sin^4 x$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}}{16} \\ &= \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \sin^4 x = \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}$$

SMAIL
El jaafari
<https://www.dimamath.com>

VI – Equation du second degré à coefficients réels

Définition

Une équation du second degré à coefficients dans \mathbb{R} est une équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ est son discriminant

La forme canonique du trinôme $az^2 + bz + c$ est donnée par l'expression :

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Proposition 1

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant réel de l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ dont l'inconnue est z dans \mathbb{C}

❖ Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

❖ Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution réelle double $z_0 = -\frac{b}{2a}$

❖ Si $\Delta < 0$, l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exercices

Résoudre, dans \mathbb{C} , les équations suivantes :

* $z^2 + z + 6 = 0$

* $2z^2 - 2z + 25 = 0$

SMAIL
Eljaafari
https://www.dimamath.com

Proposition 2

❖ Soit $(s, p) \in \mathbb{R}^2$; les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 \times z_2 = p \end{cases}$ sont les

solutions de l'équation $z^2 - s z + p = 0$

❖ Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $a z^2 + b z + c = 0$; alors si l'on connaît l'une d'elle on calcule facilement la deuxième en utilisant l'une des deux égalités

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ ou } z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

VII - Transformations usuelles du plan et nombres complexes

1- Transformations du plan et nombres complexes

Proposition

Soit $F : \begin{cases} P \mapsto P \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{cases}$ une transformation du plan P dans lui-même, alors on peut lui

associer une unique application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$f : \begin{cases} \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = f(z) \end{cases}$ tel que pour tous les points $M(z)$ et $M'(z')$ du plan complexe on

ait : $M' = F(M) \Leftrightarrow z' = f(z)$

On dit que f caractérise l'application F et que F représente f dans le plan complexe

2 - Transformations usuelles

a) La translation

Définition

Soit \vec{u} un vecteur non nul

La translation de vecteur \vec{u} est la transformation du plan dans lui-même définie par :

$T_{\vec{u}} : \begin{cases} P \mapsto P \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{cases}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Proposition

Soit \vec{u} un vecteur non nul d'affixe u

L'écriture ou (formule) **complexe de la translation** $T_{\vec{u}}$ est : $\mathbf{z}' = \mathbf{z} + u$

Effectivement, on a :

$$\begin{aligned} M'(z) = T_{\vec{u}}(M(z)) &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \text{aff}(\overrightarrow{MM'}) = \text{aff}(\vec{u}) \\ &\Leftrightarrow z' - z = u \Leftrightarrow z' = z + u \end{aligned}$$

b - L'homothétieDéfinition

Soit Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$

L'homothétie h de centre Ω et de rapport k est l'application définie par :

$$h: \begin{cases} P \mapsto P' \\ M \mapsto M' \end{cases} \text{ tel que } \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

Proposition

Soit h l'homothétie de centre le point Ω d'affixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$.

L'écriture complexe de l'homothétie h est la relation : $\mathbf{z}' = \omega + e^{i\theta} (\mathbf{z} - \omega)$.

Effectivement, on a :

$$\begin{aligned} h(M(z)) = M'(z') &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \text{aff}(\overrightarrow{\Omega M'}) = k \text{aff}(\overrightarrow{\Omega M}) \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \Leftrightarrow z' = \omega + k(z - \omega) \end{aligned}$$

c - La rotationDéfinition

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$

La rotation R de centre Ω et d'angle θ est l'application définie par :

$$R: \begin{cases} P \mapsto P' \\ M \mapsto M' \end{cases} \text{ tel que } \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M} \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

SMAIL
Eljaafari
<https://www.dimamath.com>

Proposition

Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est la relation :

$$\mathbf{z}' = \omega + e^{i\theta} (\mathbf{z} - \omega)$$

Effectivement, on a :

<https://www.dimamath.com>

$$\begin{aligned}
 R(M(z)) = M(z') &\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \overline{(\Omega M, \Omega M')} \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \overline{(\Omega M, \Omega M')} \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1 \\ \overline{(\Omega M, \Omega M')} \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)
 \end{aligned}$$

<https://www.dimamath.com>



**MATHÉMATIQUES
POUR TOUS**