Exercice 1

Soit f et g deux fonctions numériques définies par : $f(x)=x^2-x$ et $g(x)=\dfrac{2x-2}{x+1}$.

Partie 1 :

1) a) Dresser le tableau de variation des fonctions f et g.

   b) Quelle est la nature de chacune des courbes (C_f) et (C_g), préciser leurs éléments caractéristiques.

2) a) Prouver que $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}) : f(x)=g(x) \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2=0$.

   b) Déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g).

3) a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

   b) Construire dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ les deux courbes (C_f) et (C_g).

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2-x-1\geq\dfrac{x-3}{x+1}$

Partie 2 :

Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par ; $\begin{cases} F \text{ est paire} \\ F(x)=g(x)\,;\ x\leq-2 \\ F(x)=f(x)\,;\,-2<x\leq 0\end{cases}$

1) Calculer $F(5)$ et $F\left(\dfrac{3}{2}\right)$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

3) Donner l'expression de $F(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,2[$

4) Construire dans un repère orthonormé $(O';\vec{i},\vec{j})$ la courbe de la fonction F.

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions numériques et (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ telles que : $f(x)=\dfrac{3x-3}{2x-3}$ et $g(x)=\sqrt{x+1}$

1) a) Déterminer D_f puis dresser le tableau de variation de f.

   b) Déterminer D_g et dresser le tableau de variation de g.

2) a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C_f).

   b) Vérifier que $A(0;1)$ et $B(3;2)$ sont deux points communs de (C_f) et (C_g).

   c) Construire (C_f) et (C_g).

   d) Déterminer graphiquement $f\left(\left]-\infty;\dfrac{6}{5}\right]\right)$ et $f\left(\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[\right)$

3) On considère la fonction numérique h telle que $h=g\circ f$

   a) Déterminer D_h

   b) Etudier la monotonie de h sur les intervalles $\left]-\infty;\dfrac{6}{5}\right]$ et $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

c) Dresser le tableau de variation de h

d) Montrer que $\left(\forall x \in \left]-\infty;\frac{6}{5}\right]\right),\ 0 \leq h(x) \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$

e) Calculer $h(x)$ pour tout x de D_h.

Exercice 3

On considère les deux fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x)=\sqrt{x-3} \quad \text{et} \quad g(x)=x^2-4x+5$$

1) Dresser les tableaux de variations de f et g.

2) Montrer que g admet une valeur minimale sur $\mathbb{R}$.

3) On considère la fonction h définie sur $[3;+\infty[$ par : $h(x)=g\circ f(x)$

a) Déterminer l'expression de $h(x)$ pour tout x de $[3;+\infty[$.

b) Etudier la monotonie de h sur les deux intervalles $[3;7[$ et $[7;+\infty[$

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^2+2}$

1) a) Montrer que f est une fonction paire

b) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) :\ f(x)=3-\dfrac{7}{x^2+2}$

c) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) :\ \dfrac{-1}{2} \leq f(x) < 3$

2) Etudier la monotonie de la fonction f sur $[0;+\infty[$ et en déduire sa monotonie sur $]-\infty;0]$

Exercice 5

Soit h la fonction numérique définie par : $h(x)=-x+2\sqrt{x+1}$

1) a) Vérifier que $D_h=[-1;+\infty[$

b) Résoudre dans $[-1;+\infty[$, l'équation $(E) : h(x)=0$

2) a) Vérifier que $(\forall x \in [-1;+\infty[) : h(x)=2-\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$

b) En déduire que la fonction h est majorée par 2

3) On pose $g(x)=-x^2+2x+1$ et $f(x)=\sqrt{x+1}$

a) Vérifier que $(\forall x \in [-1;0]),\ 0 \leq f(x) \leq 1$ et $(\forall x \in [0;+\infty[),\ f(x) \geq 1$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction g

c) Montrer que $(\forall x \in [-1;+\infty[),\ g\circ f(x)=h(x)$; puis déduire la monotonie de la fonction h sur chacun des intervalles $[-1;0]$ et $[0;+\infty[$.

4) Dresser le tableau de variation de la fonction h et en déduire ses extrémums .

Exercice 6

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x+1}$.

1) Montrer que $D_f=\mathbb{R}$

2) Montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right), -\frac{2}{3} \leq f\left(x\right) \leq 2$

3) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $\left]-\infty;-1\right]$ et $\left[1;+\infty\right[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-1;1\right]$.

4) Dresser le tableau de variations des deux fonctions suivantes :

$$F\left(x\right) = \frac{-2|x|}{x^2 + |x| + 1} \quad \text{et} \quad G\left(x\right) = \frac{x^2 - x + 1}{2x}$$

5) Soient g et h les fonctions numériques définies par : $g\left(x\right) = \frac{1}{2-x}$ et $h\left(x\right) = \frac{x^2 - x + 1}{2\left(x-1\right)^2}$

a) Montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}\right) : h\left(x\right) = g \circ f\left(x\right)$

b) Etudier la monotonie de h sur les intervalles $\left]-\infty;-1\right]; \left[-1;1\right[$ et $\left]1;+\infty\right[$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction h

d) Déduire les extémums de la fonction h.