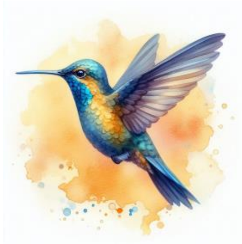
Exercice 1

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1}$.



1) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \le u_n \le 2$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \le u_n \le 2$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + u_n}$.

1) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n \le 1$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

2) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \le \dfrac{1}{2} u_n$

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \le \dfrac{1}{2^n}$

c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

1) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n < 2$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

2) a) Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}=(u_n-1)^2$

b) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$

c) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}): \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

d) En déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n-1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

e) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

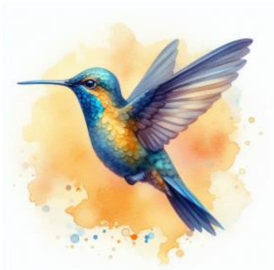
Exercice 5

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)$.

1) a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n>1$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente



2) On considère la fonction f définie sur $\mathrm{I}=[1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

a) Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}=f(u_n)$

b) Vérifier que $f(\mathrm{I})\subset\mathrm{I}$

c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=]1;3[$ par : $f(x)=\sqrt{2x+3}$

1) a) Etudier les variations de la fonction f et dresser sontableau de variation sur l'intervalle $\mathrm{I}=]1;3[$

b) Déterminer $f(]1;3[)$

c) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite $(D): y=x$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=\sqrt{3+2u_n}$

a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}): 1<u_n<3$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 7

On considère la suite numérique définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\frac{1}{1+\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{1+\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{1+\sqrt{n^2+n}}$$

Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$