Table des matières

I – Limites d'une fonction à l'infini

1 – Limite finie à l'infini – Asymptote horizontale

Définition 1

- Soit L un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]A;+\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.
  On dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$, si tout intervalle contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand
- Soit L un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]-\infty;A[$ où $A \in \mathbb{R}$.
  On dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$, si tout intervalle contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petite.

Remarques

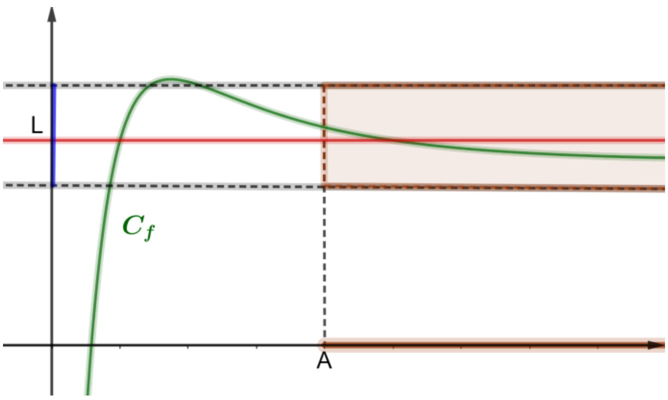
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(\forall x > A) : f(x) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(\forall x < -A) : f(x) \in]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$

Interprétation graphique de la limite et asymptote horizontale

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ signifie que pour chaque intervalle ouvert de centre L aussi petit soit-il, on peut trouver un nombre A strictement positif tel la restriction de la courbe C_f à l'intervalle $]A;+\infty[$ est dans la bande colorée

https://www.dimamath.com

MATHÉMATIQUES POUR TOUS



Définition 2 (Asymptote horizontale)

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de forme $]A;+\infty[$ et L un nombre réel.
  Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, alors la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de forme $]-\infty;A[$ et L un nombre réel.
  Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, alors la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f en $-\infty$.

Proposition (Limite nulle des fonctions élémentaires à l'infini)

★ Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite 0 en $+\infty$.

★ Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}^*)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $-\infty$.

Exemples : Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^7}=$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|}=$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^5}=$.

2 – Limite infinie à l'infini d'une fonction

Définition 1

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle de la forme $]\lambda;+\infty[$.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, si et seulement si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand

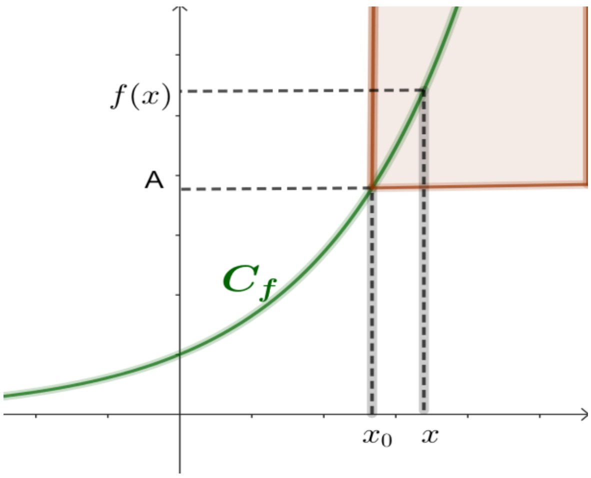
Définition 2

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle de la forme $]-\infty;\lambda[$.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, si et seulement si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit

Interprétation graphique de $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ signifie que pour chaque intervalle De la forme $]A;+\infty[$, on peut trouver un nombre x_0 strictement positif tel la restriction de la courbe C_f à l'intervalle $]x_0;+\infty[$ est dans la bande colorée



Exemple : Démontrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-2x^2\right)=-\infty$.

En effet soit $A<0$. On a $3x-2x^2<A \Leftrightarrow 2x^2-3x-A>0$

On a aussi le discriminant du trinôme $2x^2-3x-A$ est $\Delta=9-8A>0$ car $A<0$.

Les racines du trinôme $2x^2-3x-A$ sont $x_1=\dfrac{3-\sqrt{\Delta}}{4}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{\Delta}}{4}$.

Comme $x_1<x_2$ alors $2x^2-3x-A>0$ si $x\in]-\infty;x_1[$.

D'où : Pour tout intervalle $]-\infty;A[$, il existe $x_1\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in]-\infty;x_1[$ on a $3x-2x^2\in]-\infty;A[$.

Alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-2x^2\right)=-\infty$.

Remarques

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ signifie que $\forall A\in\mathbb{R},\ \exists B\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x>B,\ f(x)>A$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, signifie que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > B,\ f(x) < A$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, signifie que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x < B,\ f(x) > A$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, signifie que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x < B,\ f(x) < A$

Proposition (Limites infinies à l'infini des fonctions élémentaires)

★ Les fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto |x|$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$

★ Les fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto x^{2n+1} \left(n \in \mathbb{N}\right)$ ont pour limite $-\infty$ en $-\infty$

★ Les fonctions $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^{2n} \left(n \in \mathbb{N}\right)$; $x \mapsto |x|$ ont pour limite $+\infty$ en $-\infty$

II – Limite infinie en un nombre réel

Définition

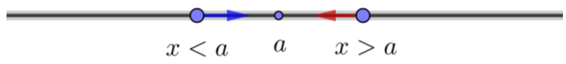
Soit f une fonction numérique et a un réel tel que a est une borne de D_f ou $a \in D_f$.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, si et seulement si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.

Remarques

Lorsqu'on étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers a, on est amené souvent à distinguer les cas où x tend vers a par la droite, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$,

ou x tend vers a par la gauche $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.



Proposition (Limites des fonctions élémentaires en 0)

★ Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n}} \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ont pour limite $+\infty$ en 0.

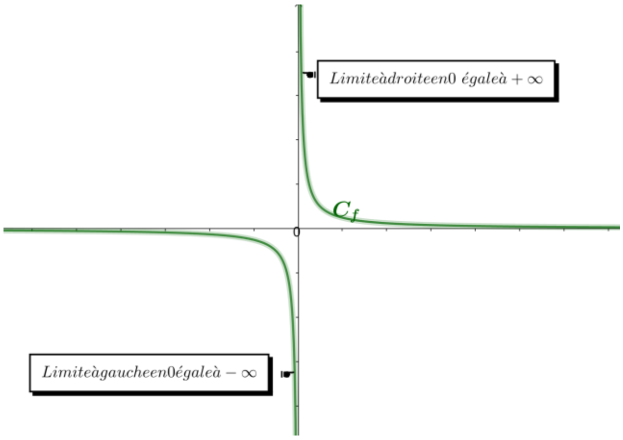
★ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

★ Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n+1}} \left(n \in \mathbb{N}\right)$ ont pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^{2n+1}} = +\infty$.

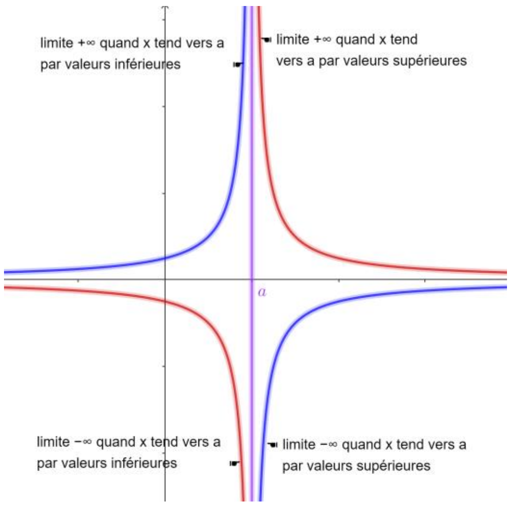
★ Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n+1}} \left(n \in \mathbb{N}\right)$ ont pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^{2n+1}} = -\infty$.

Exemple : Etudier la limite de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ quand x tend vers 0. Comme on va le constater à partir de sa courbe représentative on est contraint de calculer sa limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$



Interprétation graphique et asymptote verticale



- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ signifie que

  Pour tout intervalle $]A;+\infty[$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$
  Tel que la courbe correspondant à l'intervalle $]a;a+\alpha[$ est très proche de la droite d'équation $x = a$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ signifie que

  Pour tout intervalle $]A;+\infty[$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$
  Tel que la courbe correspondant à l'intervalle $]a-\alpha;a[$ est très proche de la droite d'équation $x = a$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$ signifie que

  Pour tout intervalle $]-\infty;A[$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$
  Tel que la courbe correspondant à l'intervalle $]a;a+\alpha[$ est très proche de la droite d'équation $x = a$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$ signifie que

  Pour tout intervalle $]-\infty;A[$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$
  Tel que la courbe correspondant à l'intervalle $]a-\alpha;a[$ est très proche de la droite d'équation $x = a$

https://www.dimamath.com
MATHÉMATIQUES POUR TOUS

Définition (Asymptote verticale)

Soit f une fonction numérique et a un réel tel que a est une borne de D_f.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f .

III – Opérations sur les limites de fonctions

1 – Limites de la somme de fonctions

Proposition

Soient f et g deux fonctions numériques.

$\lim_{x\to\square} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to\square} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to\square} (f+g)(x)$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**

2 – Limites du produit de fonctions

Proposition

Soient f et g deux fonctions numériques.

$\lim_{x\to\square} f(x)$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x\to\square} g(x)$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x\to\square} (f\times g)(x)$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**

3 – Limites du quotient de fonctions

Proposition

Soient f et g deux fonctions numériques.

$\lim_{x\to\square} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x\to\square} g(x)$	$L'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$L\geq 0$	$L\leq 0$	$L\geq 0$	$L\leq 0$	0	0
$\lim_{x\to\square} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{L}{L'}$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**	**FI**

4 – Formes indéterminées

Les formes indéterminées

$+\infty-\infty$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{0}{0}$	$\pm\infty\times 0$

Remarque

Une forme indéterminée ne veut pas dire que la limite n'existe pas mais qu'il faut appliquer une technique adéquate pour la trouver

4 – 1 – Factorisation par le terme dominant

Exemples

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim_{x\to+\infty} 2x^3-x^2+5x+1$; $b)\ \lim_{x\to-\infty} -3x^2-7x+5$; $c)\ \lim_{x\to+\infty} x^2+3x-7$

$d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{5x-1}$; $e)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+x+5}{2x+1}$; $f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^2+2x+1}{x^3+x^2-3x+2}$; $g)\ \lim_{x\to+\infty} x-2\sqrt{x}$

Solutions

$a)\ \lim_{x\to+\infty} 2x^3-x^2+5x+1$

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} 2x^3-x^2+5x+1=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=2\end{cases}$, alors par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3-x^2+5x+1=2\times(+\infty)=+\infty$

$$b)\ \lim_{x\to-\infty} -3x^2-7x+5$$

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^2-7x+5=\lim_{x\to-\infty} x^2\left(-3-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)$$

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=-3\end{cases}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{7}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2}=0$, alors

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^2-7x+5=-3\times(+\infty)=-\infty$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{5x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{5x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(5-\frac{1}{x}\right)}$$

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{3}{x}=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 5-\frac{1}{x}=5\end{cases}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$, alors par quotient on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{5x-1}=\frac{2}{5}$

$$e)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x+5}{2x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x+5}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(3x^2+1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2+1+\frac{5}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{x}=2\end{cases}$, alors par quotient on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x+5}{2x+1}=\frac{+\infty}{2}=+\infty$

$$f)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^2+2x+1}{x^3+x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^2+2x+1}{x^3+x^2-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(-5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(x+1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

Puisque $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=-5 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=+\infty \end{cases}$, alors par quotient on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x^2+2x+1}{x^3+x^2-3x+2}=0$

$g)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-2\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} x-2\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2\sqrt{x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

Puisque $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1 \end{cases}$, alors par produit on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2\sqrt{x}=+\infty\times1=+\infty$

4 – 2 – Expression conjuguée

Exemples : Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+6}-\sqrt{x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+6x+3}-(3x+1)$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{\sqrt{7-3x}-4}$ $\qquad \lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{6x+1}-5}$

4 – 3 – Expression conjuguée et factorisation

Exemples : Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1-\sqrt{4x^2+3x-2}$

5 – Limites de la composée de fonctions

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit g une fonction définie sur un intervalle J telles que pour tout x de I, on a : $g(x)\in\mathrm{J}$.

On appelle **la fonction composée** de g et f la fonction, notée $g\circ f$, qui est définie sur I pour tout x de I par $g\circ f(x)=g(f(x))$

Exemples

Déterminer l'expression de $g\circ f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^2$; $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ $\qquad$ 2) $f(x)=\sqrt{x-1}$; $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

3) $f(x)=x^3$; $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ $\qquad$ 4) $f(x)=\cos x$; $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit g une fonction définie sur un intervalle J telles que pour tout x de I, on a : $g(x)\in\mathrm{J}$ et soient a, b et L des nombres réels éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x)=b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x)=\mathrm{L} \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=\mathrm{L}$

Exemples

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+3x+4}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$

IV – Théorème de comparaison – Théorème des gendarmes

Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a qui est un nombre réel ou éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$ tel que est une borne de I.

★ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

★ Si $\left.\begin{array}{l} * \ \forall x\in I,\ f(x)\le g(x) \\ * \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Remarques

Le théorème de comparaison s'applique aussi lorsque $\forall x\in I,\ f(x) > g(x)$ et lorsque $\forall x\in I,\ f(x) < g(x)$

Preuve

★ Montrons que $\left.\begin{array}{l} * \ \forall x\in I,\ f(x)\ge g(x) \\ * \ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ où $A\in\mathbb{R}$ contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand de I ; or pour x de I on a $f(x)\ge g(x)$. Ainsi l'intervalle $]A;+\infty[$ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand de I. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

★ Montrons que $\left.\begin{array}{l} * \ \forall x\in I,\ f(x)\le g(x) \\ * \ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, donc tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ où $A\in\mathbb{R}$ contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez petit de I ; or pour x de I on a $f(x)\le g(x)$. Ainsi l'intervalle $]-\infty;A[$ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit de I. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

★ On procède de manière analogue pour montrer le théorème lorsque x tend vers $-\infty$.

Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I et a un nombre réel ou éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$ tel que a est une borne de I et L un nombre réel.

Si $\left.\begin{array}{l} * \ \forall x\in I,\ g(x)\le f(x)\le h(x) \\ * \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Remarque

Le théorème des gendarmes s'applique aussi lorsque $\forall x\in I,\ g(x) < f(x) < h(x)$

V – Limites de la fonction exponentielle

1 – Limites à l'infini de la fonction exponentielle

Proposition

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Preuve

★ Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Pour cela on pose $f(x) = e^x - x$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$. Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Alors la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ d'où $\forall x \in [0;+\infty[$, $f(x) \geq f(0)$.

Alors $\forall x \in [0;+\infty[$, $e^x > x$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

★ Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ alors par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

D'où par inverse $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0$, par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

2 – Croissances comparées

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Preuve

- Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - x$. Or pour tout réel x, $e^x - x > 0$ (Déjà démontré précédemment) ; donc pour tout réel x, $f'(x) > 0$. Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $f(0) = 1$, alors pour tout x de $\mathbb{R}^+$ $f(x) \geq f(0)$ donc $e^x \geq \dfrac{x^2}{2} + 1 > \dfrac{x^2}{2}$ d'où $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$ pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 2$

https://www.dimamath.com
MATHÉMATIQUES POUR TOUS

Pour tout réel non nul x, on a : $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(n \times \dfrac{x}{n}\right)^n} = \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{n} = +\infty$ $(n \geq 2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, alors par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$

Comme $\frac{1}{n} > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, alors par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

↬ Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$

Pour tout réel x, $x e^x = -(-x) \times \frac{1}{e^{-x}} = -\frac{-x}{e^{-x}}$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc par comparaison $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ d'où par inverse

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = 0$ par suite $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$

↬ Les autres limites sont admises

3 – Une limite particulière

Proposition

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Preuve

En utilisant la définition du nombre dérivé de la fonction $\exp(x) = e^x$ au point 0, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$$

Exemples

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x + x - 1}{e^x + 2}$ $\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$