

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 2x}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1}; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}; \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - x)}{x-1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - x; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 3} - 2x; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin(4x)}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)(\cos x - 1)}{x^3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \tan x}{\cos(2x) - 1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x} \sin x; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \cos x}{3x^2 - 1}$$

Exercice 2

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5; g(x) = \frac{2x+3}{2x^2-x-15}; h(x) = \sqrt{(x-2)(x^2-4x-5)}; i(x) = \sqrt{\frac{3x-4}{x(x+1)}}$$

$$j(x) = \frac{\sqrt{2-x}+1}{(x-2)(x+1)}; l(x) = \frac{x^2+x-2}{\sqrt{6-x-x^2}}.$$

Exercice 3

Etudier la continuité de la fonction f en x_0 dans les cas suivants :

1/ $f(x) = 3x^2 - 5x + 1; x_0 = 2.$

2/ $f(x) = \sqrt{3x-1}; x_0 = 3.$

3/ $f(x) = \sin x + \cos x; x_0 = \frac{\pi}{2}$

4/
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}; x > 1 \\ f(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$



$$5/ \begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} - 2; x \geq 0 \\ f(x) = -\frac{\sin x}{x}; x < 0 \end{cases}$$

$$6/ \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}; x > 1 \\ f(1) = 2 \\ f(x) = \frac{x-1}{4-2\sqrt{5-x}}; x < 1 \end{cases}$$

Exercice 4

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur les intervalles donnés :

1/ $f(x) = x^2 + x - \frac{x}{x+3} + \cos x; I =]-3; +\infty[$

2/
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^2 - 5x + 1}; x < 1 \\ f(1) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

2/
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3(\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2})}; x > 1; I = \mathbb{R} \\ f(1) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

3/
$$\begin{cases} h(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x-2}; x > 2 \\ h(x) = \frac{2x+11}{3}; x \leq 2 \end{cases}; I = \mathbb{R}$$

4/
$$\begin{cases} k(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}; x \neq 2 \\ k(2) = \frac{2}{3} \end{cases}; I = \mathbb{R}$$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x^2 + bx - b - 1}; x < 1 \\ f(x) = x - 2; x > 1 \\ f(1) = c \end{cases}$$



Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 1$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax^2 - (1+a)x + 1}{b(x^2 - 1)}; |x| \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{6} \end{cases}$$



Déterminer les réels a et b pour que la fonction f soit continue en 1 et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

Exercice 7

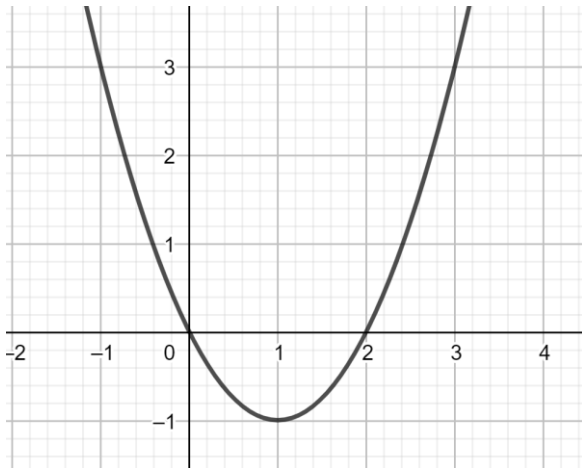
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x$$

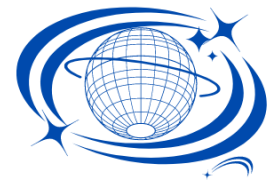
Dont la courbe représentative est donnée ci-dessous

Déterminer graphiquement les images par la fonction f des intervalles suivants :

$$I = [-1; 1]; J =]1; 3[; K =]-1; 3[; L =]-\infty; 2[; M =]0; +\infty[$$



<https://www.dimamath.com>



MATHÉMATIQUES
POUR TOUS

Exercice 8

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Déterminer les images par la fonction g des intervalles suivants : $I = [0; 3[$; $J = [4; +\infty[$; $K =]-\infty; 3[$; $L = [0; 2]$

Exercice 9

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = x^3 + x - 3$

1/ Montrer que l'équation $h(x) = 4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1; 2[$

2/ Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} , puis en déduire que $\alpha \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1/ $f(x) = x^4 + x^2 + 2x - 1$; $I = [0; 1]$

2/ $f(x) = 2 \sin x - x$; $I = \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

3/ $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x} + 1$; $I = [1; 4]$

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I :

1/ $f(x) = x^3 + 2x - 2$; $I = [0; 1]$

2/ $f(x) = x^4 + 2x - 5$; $I = [1; +\infty[$

3/ $f(x) = 1 + 2 \sin x + 3x$; $I = \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$



Exercice 12

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} 2/ Montrer que : $1 < \alpha < 2$ 3/ Donner le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Exercice 13

1/ Montrer que l'équation : $x^3 + 4x + 9 = 5x^2 + 2$ Admet au moins une solution dans \mathbb{R} 2/ Montrer que l'équation : $x = \cos x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; \pi]$ 3/ Montrer que l'équation : $1 + \sin x = 2x$, admet une unique solution α dans \mathbb{R} , et que $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

Exercice 12

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

1/ Déterminer D_f 2/ a/ Montrer que : $(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ b/ Dresser le tableau de variation de la fonction f 3/ Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-2; +\infty[$.a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.b/ Calculer $g(-1)$ et en déduire $g^{-1}(1)$ c/ Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x}$$

1/ a/ Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de \mathbb{R}^* b/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f'(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$ c/ Dresser le tableau de variation de la fonction f 2/ Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ a/ Montrer que h admet une fonction réciproque que l'on déterminera. J sur un intervalle h^{-1} b/ Calculer $h(2)$, puis en déduire $h^{-1}(2)$ c/ Calculer $h^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.<https://www.dimamath.com>MATHÉMATIQUES
POUR TOUS