Exercice 1

1) Montrer que $(\forall x \geq 1)(\forall y \geq 1): x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 = 0 \Rightarrow x = y = 1$
2) 2) Montrer que $(\forall x \geq 1)(\forall y \geq 1): x \neq y \Rightarrow (x-1)\sqrt{x+1} \neq (y-1)\sqrt{y+1}$

Exercice 2 (Ex 49 p 73 ALMOUFID)

Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $x + y = 1$, et soit n un entier natureel.

Montrer que $\left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)\left(1+\dfrac{1}{y^n}\right) \geq \left(1+2^n\right)^2$

Exercice 3

Donner la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P_1 :(\exists x \in \mathbb{N}): x^2 + x = 2$

$P_2 :(\forall x \in \mathbb{R}): |x-22| > 0$

$P_3 :(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + x + 1 > 0$

$P_4 :\left(\forall a \in \mathbb{R}^+\right)\left(\forall b \in \mathbb{R}^+\right): \dfrac{a}{2+a} \neq \dfrac{b}{2+b} \Rightarrow a \neq b$

$P_5 :(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}):\ 2x - 5y = 3$

$P_6 :(\forall x > 0):\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$

Exercice 4

Montrer que :

a) $(\forall n \in \mathbb{N}): \sqrt{4n+3} \notin \mathbb{N}$
b) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right): \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$
c) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right): \sqrt{n^2+4} \notin \mathbb{N}$
d) $(\forall n \in \mathbb{N}): \sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$
e) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right):\ \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \notin \mathbb{N}$
f) $(\forall n \in \mathbb{N}): \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} \in \mathbb{N}$
g) $(\forall n \in \mathbb{N}): \dfrac{n^{2010}+1+(n+1)^{2011}}{2} \in \mathbb{N}$

Exercice 5

Démontrer par récurrence que :

a) $(\forall n \in \mathbb{N}): 1+4+7+\ldots+(3n+1) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{2}$
b) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1,2,3\}\right): 4^n > 3^{n+1}$

c) $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ 6^{2n} - 2^{3n}$ est un multiple de 7.

d) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{35} + \ldots + \dfrac{1}{4n^2 - 1} = \dfrac{n}{2n+1}$

e) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exercice 6

1) Montrer que $\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}\right) : \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2} \geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

2) En déduire que pour tous les réels strictement positifs a, b et c, on a :

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{a+c}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Exercice 7

1) Montrer que $\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\right) : x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$

2) Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R}^{+*})(\forall b \in \mathbb{R}^{+*}) : \dfrac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b} + \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

3) Soient a, b et c trois réels.

a) Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

b) Montrer que ; $a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow a = b$

4) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

a) Montrer que $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \dfrac{4}{3}\sqrt{x}$

b) Montrer que : $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Exercice 8

On pose $I = [2; +\infty[$.

1) Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que : $a + b = ab$.

a) Montrer que $a = 2$ (Remarquer que $ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1$)

b) En déduire la valeur de b.

2) Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) :\ a \neq b \Rightarrow \dfrac{a-1}{a^2 - 2a + 2} \neq \dfrac{b-1}{b^2 - 2b + 2}$