Exercice 1

Donner la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P_1 :(\exists x \in \mathbb{N}): x^2 + x = 2$

$P_2 :(\forall x \in \mathbb{R}): |x-22| > 0$

$P_3 :(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + x + 1 > 0$

$P_4 :\left(\forall a \in \mathbb{R}^+\right)\left(\forall b \in \mathbb{R}^+\right): \dfrac{a}{2+a} \neq \dfrac{b}{2+b} \Rightarrow a \neq b$

$P_5 :(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}):\ 2x - 5y = 3$

$P_6 :(\forall x > 0):\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$

Exercice 2

Montrer que :

1) $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right): \sqrt{\dfrac{x^2+3x+1}{5}} \geq \sqrt{x}$
2) $\left(\forall (x,y) \in]1,+\infty[\times]1,+\infty[\right): \left(x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y\right)$
3) $\left(\forall x \in [-2,2]\right): \sqrt{4-x^2} - x \leq 2\sqrt{2}$
4) $\left(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}\right): \left(x \neq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{3x}{x+1} \neq 1\right)$
5) $\left(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right): \left[x + y \leq z \Rightarrow \left(x \leq \dfrac{1}{2}z \text{ ou } y \leq \dfrac{1}{2}z\right)\right]$
6) $\left(\forall x \in [1,+\infty[\right): x \geq 2\sqrt{x-1}$
7) $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right): \left(x^2 + 2\sqrt{x} - 3 > 0 \Rightarrow x > 1\right)$
8) $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\right): \left(a + b = ab \Rightarrow a = 1 \text{ ou } b = 1\right)$

Exercice 3

Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

1/ Le carré de tout réel est positif

2/ Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré

3/ Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres

4/ Tous les réels ne sont pas des rationnels

5/ Entre deux réels distincts , il existe un rationnel

https://www.dimamath.com

MATHÉMATIQUES POUR TOUS

Exercice 4

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$a/\ |x-2| = 3 \qquad b/\ |2x| - |x+1| = 5 \qquad c/\ |2-x| + 3x + 2 = |x+5| \qquad d/\ x^2 - |x-2| + 1 = 0$

2/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Exercice 5

1/ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

2/ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Montrer que : $x \neq -8 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5} \neq 2$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair

4/ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Exercice 6

Démontrer par récurrence que :

1/ $(\forall n \in \mathbb{N});\ 3^n \geq 1+2n$

2/ $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5);\ 2^n \geq 6n$

3/ $(\forall n \in \mathbb{N});\ n^3 + 2n$ est divisible par 3

4/ $(\forall n \in \mathbb{N});\ 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9

5/ $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 6);\ 2^n \geq (n+2)^2$

6/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 1+2+3+4+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

7/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

9/ $(\forall n \in \mathbb{N});\ 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$

10/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 7

Montrer par récurrence que :

1) $4^{3n} - 4^n$ est divisible par 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) $3\times5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17, pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9, pour tout $n \in \mathbb{N}$

5) $2^{10n-7} + 3^{5n-2} - 2$ est divisible par 11, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

6) $3^{5n} + 4^{5n+2} + 5^{5n+1}$ est divisible par 11, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 8

1/ a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de la division de n^2 par 5.

b) Montrer par l'absurde, que : $\forall n \in \mathbb{N};\ \sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$.

2/ a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{N}$

b) Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$.