Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f(x)=\dfrac{x^2}{x-\sqrt{x}+2}$; $g(x)=\dfrac{x+2}{|x+3|-3x}$; $h(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-7x+12}$;

$i(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{3-x}}$; $j(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$; $k(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}}$;

Exercice 2

Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$l(x)=x^2+x-1$; $m(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$; $n(x)=5\sin^2(3x)$; $p(x)=\dfrac{x}{|2x|+x^2+1}$;

$q(x)=x+|2x-3|-|2x+3|$; $r(x)=\dfrac{x^3+3x}{|x+2|+|x-2|+5}$; $s(x)=x\sin(3x)+\cos(x)$;

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

f est impaire et $\begin{cases} f(x)=x^2-2x-4;\ x\geq 3 \\ f(x)=\dfrac{-2x}{x+3} \quad ;0\leq x<3 \end{cases}$

1) Calculer $f(1)$; $f(4)$; $f(-5)$; $f(-2)$

2) Donner l'expression de $f(x)$ pour $x\in\left]-\infty;-3\right]$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2+3}$

1) Montrer que f est majorée par 1

2) Montrer que f est minorée par $-\dfrac{2}{3}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Montrer que f est bornée

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^+)\ x+y\geq 2\sqrt{xy}$

2) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

b) Montrer que f est bornée

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$

1) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2+1\geq 2|x|$

2) Montrer que f est bornée

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x\ \ +x-1}{x^2-x+1}$

1) Montrer que f admet un minimum en $x_0=0$

2) Montrer que f admet un maximum en $x_1=2$

Exercice 9

On considère les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=-x^2+4x-3,\ g(x)=\frac{2x-3}{x+1} \text{ et } h(x)=\sqrt{x+2}$$

1) Dresser les tableaux de variations des fonctions f, g et h sur leurs domaines de définition

2) Construire dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, les courbes représentatives de chacune des fonctions f, g et h.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x}$

1) a) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est impaire

2) a) Soient x et y de $\mathbb{R}^+$ tels que $x\neq y$. Montrer que $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{xy-9}{xy}$

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;3]$ et qu'elle est croissante sur $[3:+\infty[$

c) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Exercice 11

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x)=\sqrt{x+4}$ et $g(x)=x^2-6x+9$

1) Dresser les tableaux de variations de chacune des fonctions f et g.

2) Construire les courbes représentatives des fonctions f et g dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) Résoudre dans D_f l'équation $f(x)=3$

4) Déterminer graphiquement les ensembles $f([-4;5])$ et $f([5;+\infty[)$

5) Déterminer $D_{g\circ f}$ l'ensemble de définition de la fonction $g\circ f$

6) Dresser le tableau de variation de la fonction $g\circ f$

7) Déterminer l'expression de $g\circ f(x)$ pour tout x de $D_{g\circ f}$

Exercice 12

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $6f(x)+2f(-x)=3x^3-2x$

1) Montrer que la fonction f est impaire

2) Donner une expression de $f(x)$ pour tout réel x

Exercice 13

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

1) a) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f

b) Soient a et b deux réels positifs tels que $a \neq b$.

Montrer que $f(a) - f(b) = \dfrac{3\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{b}+1\right)}$

c) Déduire que la fonction f est croissante sur D_f

2) Montrer que f est bornée par -2 et 1

3) On considère la fonction numérique h définie sue $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^3} - 2}{\sqrt{x^3} + 1}$

Etudier les variations de la fonction h

Exercice 14

On considère la fonction numérique u définie sur $]-\infty, 3]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-4		-2		0		3
$u(x)$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\searrow$	-7

1) Déterminer le signe de la fonction u

2) Déterminer le tableau de variation des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3u(x) - 5$

b) $g(x) = -4u(x) + 2$

c) $h(x) = \dfrac{7}{u(x)}$

d) $i(x) = \dfrac{u(x)+2}{u(x)-3}$

e) $j(x) = \sqrt{5 - 2u(x)}$

f) $k(x) = -\left(u(x)\right)^3$