Exercice 1

Donner la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P_1 : "(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 1"$; $P_2 : "(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2 = 0"$; $P_3 : "(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n}{2} \in \mathbb{N}"$; $P_4 : "(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) : n < m"$

$P_5 : (\exists n \in \mathbb{N}); 2n+1 \; est \; pair"$; $P_6 : "(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) : b - a > 0"$; $P_7 : "(\exists! x \in \mathbb{Z}) : \frac{x}{4} + 1 \in \mathbb{Z}"$

Exercice 2

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1/ $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$; 2/ $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \wedge \bar{Q})$; 3/ $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$;

4/ $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$

Exercice 3

Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

1/ Le carré de tout réel est positif

2/ Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré

3/ Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres

4/ Tous les réels ne sont pas des rationnels

5/ Entre deux réels distincts , il existe un rationnel

Exercice 4

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$a / |x-2| = 3$ $\quad b / |2x| - |x+1| = 5$ $\quad c / |2-x| + 3x + 2 = |x+5|$ $\quad d / x^2 - |x-2| + 1 = 0$

2/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Exercice 5

Démontrer par récurrence que :

1/ $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 1 + 2n$

2/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5); 2^n \geq 6n$

3/ $(\forall n \in \mathbb{N}); n^3 + 2n$ est divisible par 3

4/ $(\forall n \in \mathbb{N}); 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9

5/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6); 2^n \geq (n+2)^2$

6/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

7/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

9/ $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

10/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

https://www.dimamath.com

MATHÉMATIQUES POUR TOUS

Exercice 6

Montrer par récurrence que :

1) $4^{3n} - 4^n$ est divisible par 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17, pour tout $n\in\mathbb{N}$

4) $4^{n}+15n-1$ est divisible par 9, pour tout $n\in\mathbb{N}$

5) $2^{10n-7}+3^{5n-2}-2$ est divisible par 11, pour tout $n\in\mathbb{N}^{*}$

6) $3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ est divisible par 11, pour tout $n\in\mathbb{N}$

Exercice 7

1/ Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que : $(x\neq 2 \text{ et } y\neq 2)\Rightarrow 2x+2y-xy-2\neq 2$

2/ *Soit* $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. Montrer que : $x\neq -8\Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5}\neq 2$

3/ *Soit* $n\in\mathbb{N}$. Montrer que : n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair

4/ Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$