Exercice 1

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=x^3+x-3$

1/ Montrer que l'équation $h(x)=4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1;2[$

2/ Justifier que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis en déduire que $\alpha \in \left]1;\frac{3}{2}\right[$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1/ $f(x)=x^4+x^2+2x-1$; $I=[0;1]$

2/ $f(x)=x^3+2x-1$; $I=\left[0,\frac{1}{2}\right]$

3/ $f(x)=x^2-5\sqrt{x}+1$; $I=[1;4]$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I :

1/ $f(x)=x^3+2x-2$; $I=[0;1]$

2/ $f(x)=x^4+2x-5$; $I=[1;+\infty[$

3/ $f(x)=1+2\sin x+3x$; $I=\left[-\frac{\pi}{6};\pi\right]$

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=2x^3-3x^2-1$$

1/ Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

2/ Montrer que : $1<\alpha<2$

3/ Donner le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

1/ Déterminer D_f

2/ a/ Montrer que : $(\forall x\in D_f)$; $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$

b/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

3/ Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]-2;+\infty[$.

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b/ Calculer $g(-1)$ et en déduire $g^{-1}(1)$

c/ Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

https://www.dimamath.com
MATHÉMATIQUES POUR TOUS

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x}$

1/ a/ Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathbb{R}^*$

b/ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\ f'(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2}$

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

2/ Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$

a/ Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b/ Calculer $h(2)$, puis en déduire $h^{-1}(2)$

c/ Calculer $h^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout $x\in J$.

Exercice 7

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $h(x)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$

1/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

2/ Montrer que la fonction h est continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

3/ a/ Etudier la dérivabilité de la fonction h à droite de $x_0=1$; et interpréter graphiquement ce résultat

b/ Montrer que : $\forall x\in]1;+\infty[;\ h'(x)=\dfrac{2x(x^2-2)}{\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)\sqrt{x^2-1}}$

c/ En déduire que h est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[1;\sqrt{2}\right]$; puis dresser son tableau de variation.

4/ Soit g la restriction de h sur l'intervalle . $I=\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b/ Montrer que : $\forall x\in I;\ g(x)=\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2$

c/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J