Exercice 1 :

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$P:"(\forall x\in\mathbb{R}); x\geq 0 \text{ ou } x\leq 0".$

$Q:"(\exists x\in\mathbb{R});\ x^2>5 \text{ et } x\in\mathbb{Z}".$

$R:"(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});\ |xy|=xy\Rightarrow (x+y)^2\geq x^2+y^2".$

$S:"(\forall a\in\mathbb{R});\ a^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\mathbb{Z}".$

$T:"(\forall \varepsilon>0)(\exists \alpha>0)(\forall x\in\mathbb{R});\ |x|<\alpha\Rightarrow \left|\dfrac{x}{x^2+2}\right|<\varepsilon".$

$L:"(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3);\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{5}".$

Exercice 2 :

1/ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ -x^2+x-1<0$.

2/ On considère la proposition $P:"(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R});\ -x^2+x-1\geq y"$

a/ Donner la négation de la proposition P.

b/ En déduire que la proposition P est fausse.

Exercice 3

1) $(\forall a>0)(\forall b>0),\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$

2/ a) Montrer que : $(\forall a\in\mathbb{R}^+)(\forall b\in\mathbb{R}^+);\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$

b) En déduire que : $(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{15})\geq 8\sqrt{15}.$

Exercice 4

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2x^2-|x-3|-4=0.$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases}2|x+1|-y=4\\ |x+2|+2y=6\end{cases}.$

Exercice 5

1/ Montrer que : $(\forall a\in]1;+\infty[);\dfrac{a^2}{a-1}\geq 4$.

2/ Montrer que : $(\forall a\in]1;+\infty[)(\forall b\in]1;+\infty[);\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}\geq 8.$

Exercice 6

1/ Démontrer que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$.

2/ Montrer que : $\forall(p,q)\in\mathbb{Z}^2; p+q\sqrt{2}=0\Rightarrow p=q=0$.

Exercice 7

1/ a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de la division de n^2 par 5.

b) Montrer par l'absurde, que : $\forall n \in \mathbb{N};\ \sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$.

2/ a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{N}$

b) Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 8

Montrer par récurrence, que :

1/ $\forall n \in \mathbb{N};\ 4^{2n+2}-1$ est un multiple de 15.

2/ $\forall n \in \mathbb{N};\ 2^{3n}-1$ est divisible par 7.

3/ $\forall n \in \mathbb{N};\ 7^{2n}+3$ est un multiple de 4.

4/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. (On note : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = 1+2+3+\ldots+n$).

5/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

6/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

7/ $\forall n \in \mathbb{N};\ 2^n > n$.

8/ Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $\forall n \in \mathbb{N};\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

9/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\times\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{1}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{k}\times\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

10/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

11/ $\forall n \in \mathbb{N};\ n^3+11n$ est un multiple de 6.

12/ $\forall n \in \mathbb{N};\ 7$ est un diviseur de $3^{2n+1}+2^{n+2}$.

13/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ est un multiple de 17.

14/ $\forall n \in \mathbb{N};\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$.

15/ $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 6;\ 2^n \geq (n+2)^2$.

16/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 4^n+6n-1$ est divisible par 9.

17/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^k = \dfrac{4\times 5^{n+1}-(5+n)\times 4^{n+1}}{5^n}$

.