Table des matières

I – Les polynômes du second degré (Les trinômes)

1 – Définitions

Définition

- Une **fonction polynôme du second degré** ou **fonction trinôme** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des constantes réelles telles que $a \neq 0$.
- Les réels a, b et c s'appellent **les coefficients** de la fonction polynôme du second degré f
- L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ s'appelle **la forme développée** du polynôme du second degré f
- La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré s'appelle **une parabole**

Exemples

Reconnaitre les fonctions polynômes du second degré et déterminer les coefficients de leur forme développée :

$f(x) = 3x^2 - 5x + 6$; $g(x) = -2x^2 + 7x - 4$; $h(x) = 8x^2 + 3x$; $u(x) = x^2 - (x+2)^2$; $v(x) = -9x^2$;
$w(x) = (2x+3)(x-5)$; $i(x) = (2x-1)^2 + (x+4)^2$; $j(x) = 8x^2 + 3x$; $l(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x} - 1$;
$k(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$; $p(x) = 3x^2 - x + \dfrac{1}{x}$; $m(x) = -5x + 2$; $q(x) = 9x - 4 + 5x^2$.

2 – La forme canonique d'un trinôme

Définition

On appelle **forme canonique** d'une fonction polynôme du second degré, une expression de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ où a, α et β sont des réels tels que $a \neq 0$

Exemple

On a : $2(x-3)^2 - 5 = 2\left(x^2 - 6x + 9\right) - 5$

$$= 2x^2 - 12x + 13$$

Par conséquent : $2(x-3)^2 - 5$ est la forme canonique de la fonction polynôme du second degré P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 2x^2 - 12x + 13$

Proposition

Toute fonction polynômiale du second degré possède une forme canonique.

Autrement dit : Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, alors $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$

Preuve de la proposition

On a : pour tout réel x, $P(x) = ax^2 + bx + c$

Puisque $a \neq 0$, on a : $P(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$

Or $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \dfrac{b}{2a} + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2}$

Par conséquent : $x^2 + \dfrac{b}{a}x = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$

Donc : $P(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right]$

$$= a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c$$

https://www.dimamath.com

MATHÉMATIQUES POUR TOUS

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

En posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ on a $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Et on a $P(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2 + \beta = \beta$

Remarque

Chaque fonction polynômiale du second degré possède :

- Une forme développée : $P(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$
- Une forme canonique : $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

A retenir :

Si $a \neq 0$, alors : $ax^2 + bx = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ (méthode de complétion du carré)

Exemples

Donner les formes canoniques des fonctions polynômes suivantes :

$P(x) = 2x^2 - 4x + 5$; $Q(x) = 3x^2 + 6x - 4$; $R(x) = -x^2 + 4x + 1$; $S(x) = -4x^2 - 24x + 11$

Solutions

- $P(x) = 2x^2 - 4x + 5$; on a : $a = 2;\ b = -4\ \ et\ \ c = 5$

  Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\times 2} = 1$ et $\beta = P(\alpha) = P(1) = 2-4+5 = 3$

  D'où la forme canonique de ce polynôme est : $P(x) = 2(x-1)^2 + 3$

- $Q(x) = 3x^2 + 6x - 4$; on a : $a = 3;\ b = 6\ \ et\ \ c = -4$

  Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\times 3} = -1$ et $\beta = P(\alpha) = P(-1) = 3-6-4 = -7$

  D'où la forme canonique de ce polynôme est : $Q(x) = 3(x+1)^2 - 7$

- $R(x) = -x^2 + 4x + 1$; on a : $a = -1;\ b = 4\ \ et\ \ c = 1$

  Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times(-1)} = 2$ et $\beta = P(\alpha) = P(2) = -4+8+1 = 5$

  D'où la forme canonique de ce polynôme est : $P(x) = -(x-2)^2 + 5$

- $S(x) = -4x^2 - 24x + 11$; on a : $a = -4;\ b = -24\ \ et\ \ c = 11$

  Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-24}{2\times(-4)} = -3$ et $\beta = P(\alpha) = P(-3) = -4\times 9 + 72 + 11 = 47$

  D'où la forme canonique de ce polynôme est : $P(x) = -4(x+3)^2 + 47$

II – Equations du second degré – Polynômes du second degré

1 – Racines d'un trinôme

1 – 1 – Définitions

Définition

- Dire que x_0 est une racine d'un polynôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ si, et seulement si $P(x_0)=0$.
- Les racines d'un trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ sont les solutions de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$.
- Résoudre une équation du second degré revient à déterminer toutes les solutions de cette équation, lorsqu'elles existent.

Exemples

- 2 est une racine du polynôme $P(x)=x^2-3x+2$, car $P(2)=0$; on dit aussi que 2 est une solution de l'équation du second degré $x^2-3x+2=0$.
- 3 et -5 sont les racines du polynôme du second degré $Q(x)=x^2+2x-15$ car $Q(3)=Q(-5)=0$

1 – 2 – Résolution d'une équation du second degré à l'aide du discriminant

Définition

Le nombre réel $\Delta=b^2-4ac$ s'appelle le **discriminant** de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ où a est un réel distinct de 0 et b et c sont deux réels quelconques

Exemples

Calculer le discriminant Δ de chacune des équations du second degré suivantes :

$(E_1):2x^2+3x-1=0$; $(E_2):4x^2-4x+1=0$; $(E_3):x^2+3x+7=0$

Solutions

$(E_1):2x^2+3x-1=0$. On a : $a=2;\ b=3;\ c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times 2\times(-1)=9+8=17$

$(E_2):4x^2-4x+1=0$. On a : $a=4;\ b=-4;\ c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 4\times 1=16-16=0$

$(E_3):x^2+3x+7=0$. On a : $a=1;\ b=3;\ c=7$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times 1\times 7=9-28=-19$

Remarque

Le discriminant Δ peut être strictement positif, nul ou strictement négatif.

Proposition 1

La forme canonique du trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ est :

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Remarque

Le nombre des racines du trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ dépend du signe du discriminant Δ.

Proposition 2

On considère l'équation du second degré $(E): ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ et soit $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant. Alors :

- Si $\Delta>0$, L'équation (E) admet deux solutions distinctes $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta = 0$, L'équation (E) admet une solution double $-\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, L'équation (E) n'admet pas de solutions réelles.

Preuve

La forme canonique du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ est $P(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Donc : $(E) \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$. Comme on l'a dit dans la remarque précédente la résolution de l'équation (E) dépend du signe de Δ.

1er cas : Si $\Delta > 0$:

$$(E) \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2ème cas : Si $\Delta = 0$

$$(E) \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

3ème cas : Si $\Delta < 0$

$(E) \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ et puisque $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solutions réelles.

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$a)\ 3x^2 - x + 2 = 0 \ \ ; b)\ -5x^2 + 9x + 2 = 0 \ ; c)\ \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0 \ \ ; d)\ -4x + 3x^2 + 1 = 0.$$

Solutions

$a)\ 3x^2 - x + 2 = 0$. $\quad a = 3 ; b = -1 ; c = 2$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times 3\times 2 = 1 - 24 = -23$. Donc $\Delta < 0$

Alors l'équation $3x^2 - x + 2 = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$. $S = \varnothing$

b) $-5x^2+9x+2=0$. $a=-5$; $b=9$; $c=2$.

On a : $\Delta=b^2-4ac=9^2-4\times(-5)\times2=81+40=121$. Donc $\Delta>0$

Alors l'équation $-5x^2+9x+2=0$ admet deux solutions distinctes

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-9-\sqrt{121}}{-10}=\frac{-9-11}{-10}=\frac{-20}{-10}=2$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-9+\sqrt{121}}{-10}=\frac{-9+11}{-10}=\frac{2}{-10}=-\frac{1}{5}$$

D'où l'ensemble de solutions de cette équation est : $\left\{-\frac{1}{5};2\right\}$

c) $\frac{1}{3}x^2-2x+3=0$. $a=\frac{1}{3}$; $b=-2$; $c=3$.

On a : $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times\frac{1}{3}\times3=4-4=0$.Donc $\Delta=0$

Alors l'équation $\frac{1}{3}x^2-2x+3=0$ admet une solution double $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2\times\frac{1}{3}}=3$.

Donc l'ensemble de solutions est : $\{3\}$.

Exercices

Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

$f(x)=2x^2+5x-3$	$g(x)=9x^2-12x+4$	$h(x)=7x^2+2x+1$
$u(x)=-4x^2+7x-6$	$v(x)=49x^2+70x+25$	$w(x)=-3x^2+4x-7$

2 – Forme factorisée d'un trinôme

Proposition

Soit un trinôme $P(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq0)$.

- ★ Si le trinôme $P(x)$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2, alors sa forme factorisée est :
  $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
- ★ Si le trinôme $P(x)$ admet une racine double x_0, alors sa forme factorisée est : $P(x)=a(x-x_0)^2$
- ★ Si le trinôme $P(x)$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$, alors $P(x)$ ne peut pas être factorisé.

Exemples

Donner la forme factorisée des trinômes suivants :

$f(x)=6x^2-5x-6$	$f(x)=3x^2+3x+5$	$f(x)=4x^2-28x+49$
$f(x)=2x^2+2x-24$	$f(x)=121x^2+22x+1$	$f(x)=x^2-2x+3$

3 – Somme et produit des racines d'un trinôme

Proposition

Si un trinôme $P(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq0)$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors :

- ★ $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
- ★ $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

Exemples

1) On considère le polynôme du second degré $P(x) = x^2 + 6x - 7$.

a) Vérifier que 1 est une racine du trinôme $P(x) = x^2 + 6x - 7$

b) En déduire la deuxième racine du trinôme $P(x) = x^2 + 6x - 7$.

2) On considère le polynôme du second degré $Q(x) = 2x^2 + bx + c$

Sachant que les racines du trinôme $Q(x)$ sont 2 et $-\dfrac{1}{2}$, déterminer les valeurs de b et c.

Solutions

1)a) On a $P(1) = 1^2 + 6\times1 - 7 = 0$, donc 1 est une racine de $P(x) = x^2 + 6x - 7$.

1)b) Soit x_2 la deuxième racine du trinôme $P(x) = x^2 + 6x - 7$, alors $1\times x_2 = \dfrac{c}{a} = -7$.

Donc $x_2 = -7$.

2) 2 et $-\dfrac{1}{2}$ sont les racines du trinôme $Q(x) = 2x^2 + bx + c$. Donc $Q(2) = 0$ et $Q\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$

Alors b et c sont solutions des équations : $2b + c + 8 = 0 \ et \ -\dfrac{1}{2}b + c + \dfrac{1}{2} = 0$ donc

$2b + \dfrac{1}{2}b + 8 - \dfrac{1}{2} = 0$ et $c = -2b - 8$ Soit $\dfrac{5}{2}b = -\dfrac{15}{2}$ et $c = -2b - 8$

Alors $b = -3$ et $c = -2$.

III – Inéquations du second degré

1 – Signe d'un trinôme

Proposition

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par ; $f(x) = a x^2 + b x + c \ (a \neq 0)$.

- ★ Si $\Delta < 0$, alors le polynôme f n'a pas de racines et il a le même signe que a

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

- ★ Si $\Delta = 0$, alors le polynôme f a une seule racine $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et a le même signe que a

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

- ★ Si $\Delta > 0$, alors le polynôme f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 on suppose que $x_1 < x_2$ et a le même signe que a à l'extérieur des racines et a le signe contraire de à l'intérieur des racines

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$

	$f(x)$	Signe de a 0	Signe de $(-a)$ 0	Signe de a	

Exemples

Etudier le signe des polynômes du second degré suivants :

$f(x)=-5x^2+26x-5$; $g(x)=3x^2+2x-5$; $h(x)=25x^2-20x+4$;

$i(x)=36x^2+84x+49$; $j(x)=3x^2+2x+5$; $k(x)=2x^2-5x+14$;

2 – Résolution d'inéquations du second degré

Exemples corrigés

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$a)\ x^2+7x-8\geq 0$; $b)\ -3x^2+5x+2>0$; $c)\ 5x^2-6x+1\leq 0$; $d)\ -4x^2+16x-15<0$;

$e)\ x^2-2\sqrt{3}x+3>0$; $f)\ -3x^2+5x-4\geq 0$; $g)\ 5x^2-17x+12<0$; $h)\ -x^2+5x+4\leq x^2-2x-5$

Solutions

$a)\ x^2+7x-8\geq 0$.

On a : $a=1;\ b=7;\ c=-8$ et $\Delta=b^2-4ac=7^2-4\times(-8)=81$. Donc $\Delta>0$

Les racines du trinôme sont $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-7-\sqrt{81}}{2}=-8$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-7+\sqrt{81}}{2}=1$

Le tableau de signe de ce trinôme est :

x	$-\infty$		-8		1		$+\infty$
x^2+7x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble de solutions est : $]-\infty;-8]\cup[1;+\infty[$

$b)\ -3x^2+5x+2>0$.

On a : $a=-3;\ b=5;\ c=2$ et $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times(-3)\times 2=49$. Donc $\Delta>0$

Les racines du trinôme sont $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-\sqrt{49}}{-6}=2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+\sqrt{49}}{-6}=-\dfrac{1}{3}$

Le tableau de signe de ce trinôme est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$-3x^2+5x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Alors l'ensemble de solutions est : $\left]-\dfrac{1}{3};2\right[$

$c)\ 5x^2-6x+1\leq 0$

On a : $a=5;\ b=-6;\ c=1$ et $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times5\times1=16$. Donc $\Delta>0$

Les racines du trinôme sont $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6-\sqrt{16}}{10}=\dfrac{1}{5}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6+\sqrt{16}}{10}=1$

Le tableau de signe de ce trinôme est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		1		$+\infty$
$5x^2-6x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors l'ensemble de solutions est : $\left[\frac{1}{5};1\right]$

$d)\ -4x^2+16x-15<0$

On a : $a=-4;\ b=16;\ c=-15$ et $\Delta=b^2-4ac=(16)^2-4\times(-4)\times(-15)=-240.$ Donc $\Delta<0$

Le trinôme n'admet pas de racines. Par conséquent son signe est celui de $a=-4$

x	$-\infty$	$+\infty$
$-4x\ \ +16x-15$	$-$	

Alors l'ensemble de solutions est : $]-\infty;+\infty[$

$e)\ x^2-2\sqrt{3}x+3>0$

On a : $a=1;\ b=-2\sqrt{3};\ c=3$ et $\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times3=0.$ Donc $\Delta=0$

Le trinôme admet une racine double $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

Le tableau de signe de ce trinôme est :

x	$-\infty$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2-2\sqrt{3}x+3$		$+$	0	$+$	

Alors l'ensemble de solutions est : $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$h)\ -x^2+5x+4\leq x^2-2x-5 \Leftrightarrow 2x^2-7x-9\geq 0$

On a : $a=2;\ b=-7;\ c=-9$ et $\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times2\times(-9)=121.$ Donc $\Delta>0$

Les racines du trinôme sont $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-\sqrt{121}}{4}=-1$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+\sqrt{121}}{4}=\frac{9}{2}$

Le tableau de signe de ce trinôme est :

x	$-\infty$		-1		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$2x^2-7x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors l'ensemble de solutions est : $]-\infty;-1]\cup\left[\frac{9}{2};+\infty\right[$

IV – Variations – Représentation graphique d'un trinôme

1 – Variations d'une fonction polynôme du second degré

Proposition

Soit f une fonction polynôme du second degré, telle que : $f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq0)$.

$a>0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗

$a<0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘

Exemples

Dresser les tableaux de variation des polynômes du second degré suivants :

$a)\ f(x)=2x^2-4x+3$; $b)\ g(x)=-2x^2+6x+1$

Solutions

$a)\ f(x)=2x^2-4x+3$. On a : $a=2;\ b=-4;\ c=3$

Donc : $\frac{11}{2}$

Puisque $a=2>0$, alors :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$b)\ g(x)=-2x^2+6x+1$. On a : $a=-2;\ b=6;\ c=1$

Donc : $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{-6}{2\times(-2)}=\frac{3}{2}$ *et* $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{(6)^2-4\times(-2)\times 1}{4\times(-2)}=\frac{11}{2}$

Puisque $a=-2<0$, alors :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$	

2 – Extrémums d'un polynôme du second degré

Proposition

Soit f une fonction polynôme du second degré, telle que : $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

Sa forme canonique est $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ où $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}$. Alors :

- ★ Si $a>0$, f admet un **minimum** pour $x=\alpha$. Ce **minimum** est égal à β.
- ★ Si $a<0$, f admet un **maximum** pour $x=\alpha$. Ce **maximum** est égal à β.

3 – Représentation graphique d'un polynôme du second degré

Définition

- La représentation graphique d'un polynôme du second degré s'appelle **une parabole.**
- Le point de coordonnées $(\alpha;\beta)$ s'appelle **le sommet de la parabole**.

Exemple

Soit f le polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-7x+3$.

1) Quelle est la nature de la représentation graphique de la fonction f ?

2) Déterminer les coordonnées du sommet .

Réponse

1) La représentation graphique de la fonction f est une parabole

2) On a : $a=2;\ b=-7;\ c=3$ donc : $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{4}$ *et* $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{8}=-\frac{25}{8}$

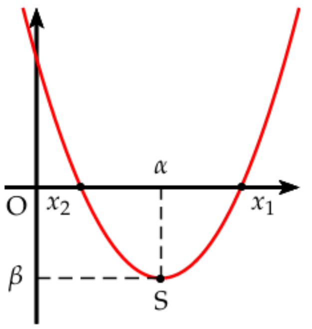
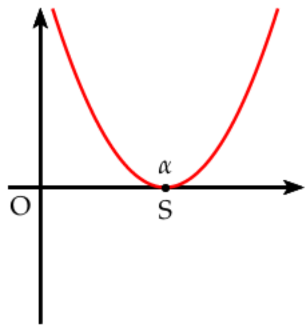
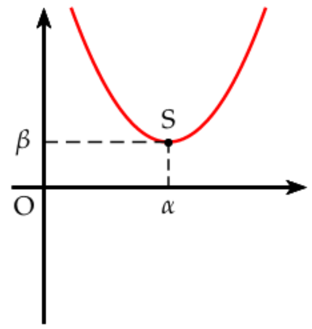
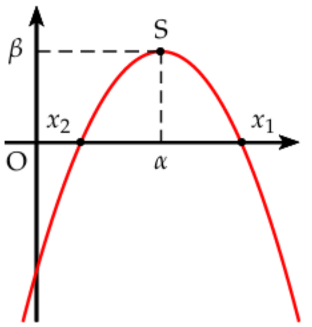
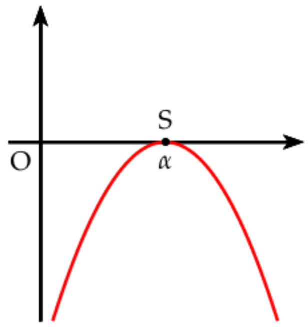
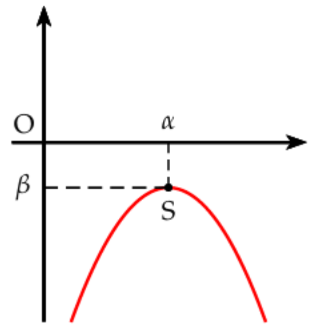
D'où les coordonnées du sommet S sont $\left(\frac{7}{4};-\frac{25}{8}\right)$

Proposition

Soit f le polynôme du second degré tel que $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

- ★ La parabole (courbe représentative de f) admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\alpha$
- ★ Si $\Delta>0$, la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses.
- ★ Si $\Delta=0$, la parabole est tangente à l'axe des abscisses.
- ★ Si $\Delta<0$, la parabole n'a pas de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

A retenir :

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$a>0$			
$a<0$			

Exemples

On considère f le polynôme du second degré défini par : $f(x)=x^2-2x-3$

1) Déterminer la forme canonique du polynôme f .

2) Donner la nature de la représentation graphique de f et donner les cordonnées de son sommet puis l'équation de son axe de symétrie.

3) Déterminer les racines du polynôme f puis donner sa forme factorisée.

4) Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour tout réel x

5) Dresser le tableau de variation de f .

6) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

V – Equations et inéquations se ramenant au second degré

1 – Equations rationnelles

Exemple 1 : Résoudre l'équation $(E_1): x+\dfrac{1}{x+3}=-1$

Réponse :

- Déterminons d'abord l'ensemble de définition de l'équation (ou ensemble d'existence).
  En effet pour qu'un réel x soit solution de l'équation (E_1), il doit vérifier que $x+3\neq 0$ c'est-à-dire $x\neq -3$ (on dit que -3 est une valeur interdite de l'équation). Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$.

- Pour $x\neq -3$, on a : $x+\dfrac{1}{x+3}=-1 \Leftrightarrow \dfrac{x(x+3)}{x+3}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{-(x+3)}{x+3}$

$$\Leftrightarrow x(x+3)+1=-(x+3)$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x+1=-x-3$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x+1+x+3=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+4=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x+2=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2$$

Et comme $-2\neq -3$, alors l'ensembles des solutions de cette équation est $\{-2\}$.

Exemple 2 : Résoudre l'équation $(E_2): \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{2x-1}=9$

Solution

- L'ensemble de définition de l'équation (E_2) est $\mathbb{R}-\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$

- Pour $x\neq 0$ et $x\neq\dfrac{1}{2}$, on a : $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{2x-1}=9 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x(2x-1)}-\dfrac{2x}{x(2x-1)}=\dfrac{9x(2x-1)}{x(2x-1)}$

$$\Leftrightarrow 2x-1-2x=9x(2x-1)$$
$$\Leftrightarrow 18x^2-9x+1=0$$

Donc les solutions de l'équation (E_2) sont les solutions de l'équation $18x^2-9x+1=0$.

$a=18;\ b=-9;\ c=1$; donc $\Delta=b^2-4ac=(-9)^2-4\times18\times1=81-72=9$

Alors cette équation admet deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{9-3}{36}=\dfrac{1}{6}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{9+3}{36}=\dfrac{1}{3}$.

D'où l'ensemble de solutions de l'équation (E_2) est $\left\{\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{3}\right\}$ (car $\dfrac{1}{6}\in\mathbb{R}-\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$ de même $\dfrac{1}{3}\in\mathbb{R}-\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$)

Exemple 3 : Résoudre l'équation $(E_3): \dfrac{x-2}{7}+\dfrac{21}{x+3}=\dfrac{47}{7}$

Solution

- L'ensemble de définition de l'équation est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $x+3\neq 0$, donc $D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$

- Pour $x\neq -3$, on a : $\dfrac{x-2}{7}+\dfrac{21}{x+3}=\dfrac{47}{7} \Leftrightarrow (x-2)(x+3)+21\times 7=47(x+3)$

$$\Leftrightarrow x^2-46x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-46)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=46$$

Comme $0 \in D_f$ et $-46 \in D_f$ alors l'ensemble de solutions de l'équation (E_3) est $\{0;46\}$.

2 – Inéquations rationnelles

Exemple 1 : Résoudre l'inéquation $(I_1): \dfrac{4x^2-3x-1}{2-x} \leq 0$

Solution

- Cette équation est possible lorsque $2-x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 2$ donc $D_f = \mathbb{R}-\{2\}$
- Déterminons les solutions des équations $4x^2-3x-1=0$ et $2-x=0$.
  - $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$
  - $4x^2-3x-1=0$; on a : $a=4;\ b=-3;\ c=-1$. Donc

    $\Delta = b^2-4ac=(-3)^2-4\times4\times(-1)=9+16=25$

    Alors $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3-5}{8}=-\dfrac{2}{8}=-\dfrac{1}{4}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3+5}{8}=\dfrac{8}{8}=1$
- Dressons maintenant le tableau de signe de $\dfrac{4x^2-3x-1}{2-x}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x^2-3x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4x^2-3x-1}{2-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

- Alors l'ensemble de solutions de l'inéquation (I_1) est : $\left[-\dfrac{1}{4};1\right] \cup]2;+\infty[$

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation $(I_2): \dfrac{4x^2-3x-1}{-2x^2+3x-5} > 0$

Solution

- L'inéquation est possible lorsque $-2x^2+3x-5 \neq 0$

  Résolvons l'équation $-2x^2+3x-5=0$. On a : $a=-2;\ b=3;\ c=-5$

  Donc $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times(-2)\times(-5)=9-40=-31$; par conséquent $\Delta<0$.

  Alors $-2x^2+3x-5 \neq 0$ pour tout réel x. D'où $D_f=\mathbb{R}$
- D'après ce qui précède on a : $-2x^2+3x-5<0$ pour tous les réels x.

  Etudions le signe de $4x^2-3x-1$:

  On a $4x^2-3x-1=0$, $a=4;\ b=-3;\ c=-1$

  Donc $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times4\times(-1)=9+16=25$. Alors $\Delta>0$.

  Les solutions de cette équation sont : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3-5}{8}=-\dfrac{1}{4}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3+5}{8}=1$.

Le tableau de signe de l'expression $\dfrac{4x^2-3x-1}{-2x^2+3x-5}$ est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$4x^2-3x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-2x^2+3x-5$		$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{4x^2-3x-1}{-2x^2+3x-5}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Alors l'ensemble de solutions de cette inéquation est : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Exemple 3 : Résoudre l'inéquation $(I_3):\dfrac{(2x+1)(-2x^2-3x+5)}{3x^2+2x-1}\geq 0$

Solution

- $3x^2+2x-1=0;\ a=3,\ b=2,\ c=-1$. Donc $\Delta=b^2-4ac=16$.

  Donc les solutions de cette équation sont : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-4}{6}=-1$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+4}{6}=\dfrac{1}{3}$

  Alors $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}$

- **On a :** $2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

  $-2x^2-3x+5=0;\ a=-2,\ b=-3,\ c=5$ et $\Delta=b^2-4ac=49$ Donc $\Delta>0$

  Les solutions de cette équation sont : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3-7}{-4}=1$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3+7}{-4}=-\dfrac{5}{2}$

  Le tableau de signe de l'expression $\dfrac{(2x+1)(-2x^2-3x+5)}{3x^2+2x-1}$ est :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x^2-3x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x^2+2x-1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(2x+1)(-2x^2-3x+5)}{3x^2+2x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

- Alors $S=\left]-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left]-1;-\frac{1}{2}\right]\cup\left]\frac{1}{3};1\right]$

3 – Equations bicarrées

Définition et proposition

⌘ On appelle **une équation bicarrée** toute équation de la forme $(E): a\,x^4+b\,x^2+c=0$ où a, b et c sont des réels tels que $a\neq 0$.

⌘ Pour résoudre une équation bicarrée $a\,x^4+b\,x^2+c=0$, on effectue le changement de variable $t=x^2$

Puis on résout l'équation $a t^2+bt+c=0$ d'inconnue t.

- Si $\Delta < 0$, les deux équations n'ont pas de solutions
- Si $\Delta = 0$, l'équation $at^2 + bt + c = 0$ admet une solution double t_0. Alors les solutions de l'équations (E) sont les solutions de l'équation $x^2 = t_0$
- Si $\Delta > 0$, l'équation $at^2 + bt + c = 0$ admet deux solutions distinctes t_1 et t_2, alors les solutions de l'équation (E) sont les solutions des deux équations $x^2 = t_1$ et $x^2 = t_2$

Exemple 1 : Résoudre l'équation $(E_1): x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solution

On a : $(E_1): x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 - 13\left(x^2\right) + 36 = 0$. On pose $t = x^2$

Alors : $(E_1) \Leftrightarrow \left(E_1'\right): t^2 - 13t + 36 = 0$

- Résolution de l'équation $\left(E_1'\right): t^2 - 13t + 36 = 0$. On a : $a = 1;\ b = 13;\ c = 36$

  $\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4\times1\times36 = 169 - 144 = 25$. Donc $\Delta > 0$.

  Les solutions de l'équation $\left(E_1'\right)$ sont : $t_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{13-5}{2} = 4$ et $t_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{13+5}{2} = 9$
- Alors : $(E_1): x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$ ou $x^2 = 9$

  $\Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -2) \text{ ou } (x = 3 \text{ ou } x = -3)$
- Alors l'ensemble de solutions de l'équation (E_1) est $S = \{-3; -2; 2; 3\}$

Exemple 2 : Résoudre l'équation $(E_2): 2x^4 - x^2 - 6 = 0$

Solution

On a $(E_2): 2x^4 - x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2\right)^2 - \left(x^2\right) - 6 = 0$. On pose $t = x^2$

Alors : $(E_2) \Leftrightarrow \left(E_2'\right): 2t^2 - t - 6 = 0$

- Résolution de l'équation $\left(E_2'\right): 2t^2 - t - 6 = 0$. On a : $a = 2;\ b = -1;\ c = -6$

  $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times2\times(-6) = 1 + 48 = 49$. Donc $\Delta > 0$.

  Les solutions de l'équation $\left(E_2'\right)$ sont : $t_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-7}{4} = -\dfrac{3}{2}$ et $t_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+7}{4} = 2$
- Alors : $(E_2): 2x^4 - x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{3}{2} (impossible)$ ou $x^2 = 2$

  $\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$
- Alors l'ensemble de solutions de l'équation (E_1) est $S = \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$

Exemple 3 : Résoudre l'équation $(E_3): x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

Solution

On a $(E_3): x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 - 8\left(x^2\right) + 16 = 0$. On pose $t = x^2$

Alors : $(E_3) \Leftrightarrow \left(E_3'\right): t^2 - 8t + 16 = 0$

- Résolution de l'équation $\left(E_3'\right): t^2-8t+16=0$. On a : $a=1;\ b=-8;\ c=16$

  $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times1\times(16)=64-64=0$. Donc $\Delta=0$.

  La solution double de l'équation $\left(E_3'\right)$ sont : $t_0=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{8}{2}=4$

- Alors : $(E_3): x^4-8x^2+16=0 \Leftrightarrow x^2=4$

  $\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

- Alors l'ensemble de solutions de l'équation (E_3) est $S=\{-2;\ 2\}$

Exemple 4 : Résoudre l'équation $(E_4): 2x^4+17x^2+21=0$

Solution

On a $(E_4): 2x^4+17x^2+21=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2\right)^2+17\left(x^2\right)+21=0$. On pose $t=x^2$

Alors : $(E_4) \Leftrightarrow \left(E_4'\right): 2t^2+17t+21=0$

- Résolution de l'équation $\left(E_4'\right): 2t^2+17t+21=0$. On a : $a=2;\ b=17;\ c=21$

  $\Delta=b^2-4ac=(17)^2-4\times2\times(21)=289-168=121$. Donc $\Delta>0$.

  Les solutions de l'équation $\left(E_4'\right)$ sont : $t_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-17-11}{4}=-7$ et $t_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-17+11}{4}=-\dfrac{3}{2}$

- Alors : $(E_4): 2x^4+17x^2+21=0 \Leftrightarrow x^2=-7$ (impossible) ou $x^2=-\dfrac{3}{2}$ (impossible)

- Alors l'équation (E_4) n'admet pas de solutions réelles dont $S=\varnothing$

4 – Equations avec des racines carrées

Exemple 1 : Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $(E_1): \sqrt{x}=x-2$

Solution

- Les conditions d'existence de l'équation (E_1) sont : $x\geq0$ et $x-2\geq0$. Donc $D_f=[2;+\infty[$

- Pour $x\geq2$, on a : $(E_1): \sqrt{x}=x-2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=(x-2)^2$

  $\Leftrightarrow x=x^2-4x+4$

  $\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$

- Résolution de l'équation $\left(E_1'\right): x^2-5x+4=0$. On a : $a=1;\ b=-5;\ c=4$

  Le discriminant de $\left(E_1'\right)$ est : $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times4=25-16=9$, Donc $\Delta>0$

  Les solutions de l'équation $\left(E_1'\right)$ sont : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5-3}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5+3}{2}=4$

- Comme $1\notin D_f$ et $4\in D_f$, alors l'ensemble de solution de l'équation (E_1) est $S=\{4\}$

Exemple 2 : Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $(E_2): \sqrt{x-3}=-x+5$

Solution

- Les conditions d'existence de l'équation (E_1) sont : $x-3\geq0$ et $-x+5\geq0$ soit $-3\leq x\leq5$. Donc

  $D_f=[-3;5]$

- Pour $x \in [-3;5]$, on a : $(E_1) : \sqrt{x-3} = -x+5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-3}\right)^2 = (-x+5)^2$
$$\Leftrightarrow x-3 = x^2 - 10x + 25$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0$$
- Résolution de l'équation $(E_2') : x^2 - 11x + 28 = 0$. On a : $a = 1;\ b = -11;\ c = 28$

  Le discriminant de (E_2') est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4\times1\times28 = 121 - 112 = 9$, Donc $\Delta > 0$

  Les solutions de l'équation (E_2') sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11-3}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11+3}{2} = 7$
- Comme $7 \notin D_f$ et $4 \in D_f$, alors l'ensemble de solution de l'équation (E_1) est $S = \{4\}$

Exemple 3 : Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $(E_3) : \sqrt{x+3} = x-4$

Solution

- Les conditions d'existence de l'équation (E_3) sont : $x+3 \geq 0$ et $x-4 \geq 0$ soit $x \geq 4$. Donc $D_f = [4;+\infty[$
- Pour $x \in [4;+\infty[$, on a : $(E_1) : \sqrt{x+3} = x-4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x-4)^2$
$$\Leftrightarrow x+3 = x^2 - 8x + 16$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 13 = 0$$
- Résolution de l'équation $(E_3') : x^2 - 9x + 13 = 0$. On a : $a = 1;\ b = -9;\ c = 13$

  Le discriminant de (E_3') est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4\times1\times13 = 81 - 52 = 29$, Donc $\Delta > 0$

  Les solutions de l'équation (E_3') sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+\sqrt{29}}{2}$
- Comme $\dfrac{9-\sqrt{29}}{2} < 4$ *et* $\dfrac{9+\sqrt{29}}{2} > 4$, *alors* : $\dfrac{9-\sqrt{29}}{2} \notin D_f$ et $\dfrac{9+\sqrt{29}}{2} \in D_f$, alors l'ensemble de solution de l'équation (E_1) est $S = \left\{\dfrac{9+\sqrt{29}}{2}\right\}$

Exemple 4 : Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $(E_4) : \sqrt{x-1} = x$

Solution

- Les conditions d'existence de l'équation (E_4) sont : $x-1 \geq 0$ et $x \geq 0$ soit $x \geq 1$. Donc $D_f = [1;+\infty[$
- Pour $x \in [1;+\infty[$, on a : $(E_4) : \sqrt{x-1} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (x)^2$
$$\Leftrightarrow x-1 = x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$$
- Résolution de l'équation $(E_4') : x^2 - x + 1 = 0$. On a : $a = 1;\ b = -1;\ c = 1$

  Le discriminant de (E_4') est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times1 = 1 - 4 = -3$, Donc $\Delta < 0$

  Alors l'équation (E_4') n'admet pas de solutions réelles

- Par conséquent l'équation (E_4) n'admet pas de solutions réelles soit $S=\varnothing$.

Exemple 5 : Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $(E_5): x-5\sqrt{x}+6=0$

Solution

- La condition d'existence de l'équation $(E_5): x-5\sqrt{x}+6=0$ est $x\geq 0$. Donc $D_f=\mathbb{R}^+$
- Pour $x\in D_f$, $x-5\sqrt{x}+6=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-5\left(\sqrt{x}\right)+6=0$; on pose $t=\sqrt{x}$

  Alors $(E_5)\Leftrightarrow (E_5'): t^2-5t+6=0$

- Résolution de l'équation $(E_5'): t^2-5t+6=0$; on a : $a=1;\ b=-5;\ c=6$

  $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1;$ Donc $\Delta>0$

  Les solutions de l'équation (E_5') sont : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-\sqrt{1}}{2}=2$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+\sqrt{1}}{2}=3$
- Les solutions de l'équation (E_5) sont données par : $\sqrt{x}=2$ ou $\sqrt{x}=3$ soit $x=4$ ou $x=9$
- L'ensemble de solutions de l'équation (E_5) est $S=\{4;9\}$

5 - Nombres dont la somme et le produit sont donnés

Proposition

Les nombres réels x et y tels que la somme $x+y=S$ et le produit $x\times y=P$ sont les solutions de l'équation du second degré $X^2-SX+P=0$ d'inconnue X.

Exemple 1 : Déterminer les nombres réels x et y tels que $x+y=4$ et $x\times y=-21$

Solution

- Puisque $x+y=4$ et $x\times y=-21$ alors x et y sont les solutions de l'équation du second degré :

  $t^2-4t-21=0$
- Résolution de l'équation : $t^2-4t-21=0$; $a=1;\ b=-4;\ c=-21$.

  $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-21)=16+84=100.$ Donc $\Delta>0$

  Les solutions de l'équation $t^2-4t-21=0$, sont

  $t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-\sqrt{100}}{2}=-3$ et $t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+\sqrt{100}}{2}=7$
- Alors on a : $(x=-3$ et $y=7)$ ou $(x=7$ et $y=-3)$

Exemple 2 : Déterminer les nombres réels x et y tels que $x+y=8$ et $x\times y=16$

Solution

- Puisque $x+y=8$ et $x\times y=16$ alors x et y sont les solutions de l'équation du second degré :

  $t^2-8t+16=0$
- Résolution de l'équation : $t^2-8t+16=0$; $a=1;\ b=-8;\ c=16$.

  $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times1\times(16)=64-64=0.$ Donc $\Delta=0$

  La solution double de l'équation $t^2-8t+16=0$, est $t_0=-\frac{b}{2a}=\frac{8}{2}=4$
- Alors on a : $x=4$ et $y=4$

Exemple 3 : Déterminer les nombres réels x et y tels que $x+y=3$ et $x\times y=7$

Solution

- Puisque $x+y=3$ et $x\times y=7$ alors x et y sont les solutions de l'équation du second degré :
  $t^2-3t+7=0$

- Résolution de l'équation : $t^2-3t+7=0$; $a=1$; $b=-3$; $c=7$.
  $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(7)=9-28=-19$. Donc $\Delta<0$
  Alors l'équation $t^2-3t+7=0$ n'admet pas de solutions réelles
- Par conséquent ils n'existent pas de nombres réels x et y tels que $x+y=3$ et $x\times y=7$. $S=\varnothing$

V – Problèmes utilisant le second degré

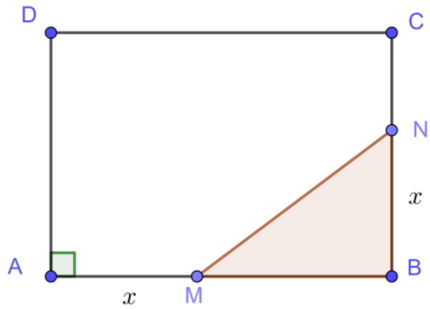
Problème 1 : Soit ABCD un rectangle tel que $\mathrm{AB}=6m$ et $\mathrm{AD}=4m$

Soit M un point du segment $[\mathrm{AB}]$ et N un point du segment $[\mathrm{BC}]$

Tels que $\mathrm{AM}=x$ et $\mathrm{BN}=x$.

1) Déterminer les valeurs que x peut prendre
2) Calculer en fonction de x, l'aire du triangle MBN
3) Déterminer les valeurs possibles de x pour que l'aire

du triangle MBN Soit égale à $\frac{1}{6}$ de l'aire du rectangle ABCD.



Solution

1) Puisque $M\in[AB]$ et $AM=x$, alors $0\le x\le 6$ ①

Et puisque $N\in[BC]$ et $BN=x$, alors $0\le x\le 4$ ②

Donc de ① et ② on déduit que : $0\le x\le 4$

2) L'aire du triangle MBN est $\mathcal{A}(MBN)=\frac{MB\times BN}{2}=\frac{(6-x)\times x}{2}=\frac{6x-x^2}{2}$

3) L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A}(ABC)=\frac{AB\times AD}{2}=\frac{6\times4}{2}=12\,m^2$. Alors :

- $\mathcal{A}(MBN)=\frac{1}{6}\mathcal{A}(ABC)\Leftrightarrow\frac{6x-x^2}{2}=\frac{1}{6}\times12$
  $\Leftrightarrow 6x-x^2=4$
  $\Leftrightarrow x^2-6x+4=0$
- Résolution de l'équation $x^2-6x+4=0$ dans $[0;4]$; $a=1$; $b=-6$; $c=4$
  $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times4=36-16=20$. Donc $\Delta>0$
  Les solutions réelles de l'équation $x^2-6x+4=0$ sont : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6-\sqrt{20}}{2}=3-\sqrt{5}$ et
  $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6+\sqrt{20}}{2}=3+\sqrt{5}$
- Puisque $3-\sqrt{5}\in[0;4]$ et $3+\sqrt{5}\notin[0;4]$, alors la valeur de x qui répond à la question est $3-\sqrt{5}$

Problème 2 :

1) Résoudre l'équation $(E): x^2-\frac{37}{2}x+85=0$

2) On considère un rectangle ayant $37\,m$ pour périmètre et $85\,m^2$ pour aire. On notera respectivement a et b la longueur et la largeur de ce rectangle.

a) Exprimer b en fonction de a.

b) Déterminer les valeurs de a et b.

Solution

1) $(E): x^2 - \dfrac{37}{2}x + 85 = 0$; $a = 1$; $b = -\dfrac{37}{2}$; $c = 85$.

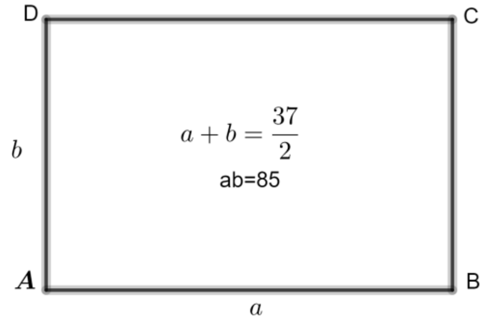
Le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\dfrac{37}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 85 = \dfrac{9}{4}$. Donc $\Delta > 0$.

Alors les solutions réelles de l'équation (E) sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\frac{37}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \dfrac{\frac{37}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{17}{2}$ et

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\frac{37}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \dfrac{\frac{37}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 10$. Donc l'ensemble de solutions de (E) est $S = \left\{\dfrac{17}{2}; 10\right\}$

2) ABCD est un rectangle de longueur a et de largeur b

De périmètre $p = 2(a+b) = 37\,m$ et d'aire $\mathcal{A} = a \times b = 85\,m^2$



Alors $a + b = \dfrac{37}{2}$ par suite $b = \dfrac{37}{2} - a$

3) On a : $a \times b = 85 \Leftrightarrow a\left(\dfrac{37}{2} - a\right) = 85$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{37}{2}a + 85 = 0$$

Donc a est solution de l'équation (E), par conséquent $a = \dfrac{17}{2}m$ ou $a = 10\,m$.

Alors : $\begin{cases} Si\ a = 8{,}5m \Rightarrow b = 10m \\ Si\ a = 10m \Rightarrow b = 8{,}5m \end{cases}$

Or $a \geq b$, alors $a = 10\,m$ et $b = 8{,}5\,m$

Problème 3 :

Une voiture et un camion font un trajet de 480 km. Ils partent en même temps.
La voiture fait 20km/h de plus que le camion et arrive à destination 2 heures avant le camion.
Déterminer la vitesse de chaque véhicule.

Solution

- Notons V et T respectivement la vitesse et la durée de la voiture pour faire le trajet de 480 km.
  Et notons V' et T'respectivement la vitesse et la durée du camion pour faire le même trajet.
  On a : $V = V' + 20$ et $T = T' - 2$ et les relations $T = \dfrac{480}{V}$ et $T' = \dfrac{480}{V'}$ donc $\dfrac{480}{V'+20} = \dfrac{480}{V'} - 2$
  Alors V' est solution de l'équation $\dfrac{480}{x+20} = \dfrac{480}{x} - 2 \Leftrightarrow 480x = 480(x+20) - 2x(x+20)$
  $$\Leftrightarrow 2x^2 + 40x - 9600 = 0$$
  $$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 4800 = 0$$
- Résolution de l'équation $x^2 + 20x - 4800 = 0$; $a = 1$; $b = 20$; $c = -4800$
  $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times 1 \times (-4800) = 400 + 19200 = 19600$. Donc $\Delta > 0$
  Les solutions de l'équation $x^2 + 20x - 4800 = 0$ sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20-\sqrt{19600}}{2} = \dfrac{-20-140}{2} = -80$

Et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20+\sqrt{19600}}{2} = \dfrac{-20+140}{2} = 60$

- Retour au problème : on a $V' > 0$, alors $V' = 60$ km et $V = V' + 20 = 80$ km

  Alors le camion roule à 60 km et la voiture roule à 80 km.

Problème 4 :

Si on soustrait un nombre de son carré, le résultat est 110.

Déterminer ce nombre.

Solution

- Notons x un nombre réel tel que $x^2 - x = 110$ alors x est solution de l'équation du second degré $x^2 - x - 110 = 0$
- Résolution de l'équation $x^2 - x - 110 = 0$; $a = 1$; $b = -1$; $c = -110$

  $\Delta = b \;\; - 4ac = (-1)^2 - 4\times 1\times(-110) = 1 + 440 = 441$. Donc $\Delta > 0$

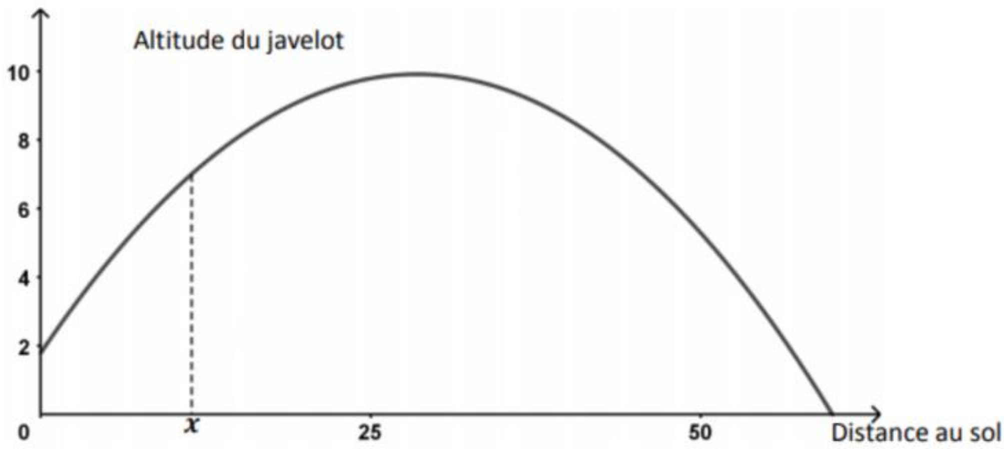
  Les solutions de l'équation $x^2 - x - 110 = 0$ sont $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-\sqrt{441}}{2} = \dfrac{1-21}{2} = -10$ et

  $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+\sqrt{441}}{2} = \dfrac{1+21}{2} = 11$
- Retour au problème : Les nombres recherchés sont : -10 et 11

Problème 5

Un athlète s'entraine au lancer de javelot. Au moment du lancer, le lanceur tient le javelot de manière que la pointe se trouve à la hauteur de son crâne. Pendant sa course, on considère que les frottements qui s'exercent sur la pointe du javelot sont négligeables et que le javelot n'est soumis qu'à son poids. La trajectoire de la pointe du javelot est donc modélisée par une parabole.

Lors du premier essai de l'athlète, la trajectoire de la pointe du javelot est donnée par la fonction f telle que : $f(x) = -0,01x^2 + 0,57x + 1,8$ où x est la distance au sol, en mètre, parcourue par la pointe du javelot et $f(x)$ est l'altitude, en mètre, de la pointe du javelot quand celle-ci se trouve à une distance x mètres du lanceur. On donne ci-dessous la représentation graphique de f .



a) Calculer $f(0)$, puis déduire la taille de l'athlète.

b) Vérifier que $f(x) = -0,01(x+3)(x-60)$

c) Quelle est la distance au sol totale parcourue par le javelot ?

d) Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;60]$. La hauteur maximale atteinte par le javelot dépasse-t-elle 10m ? Justifier