Table des matières

I – Intervalles de IR

1 – Intervalles bornés de IR

Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

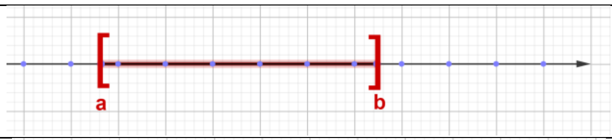
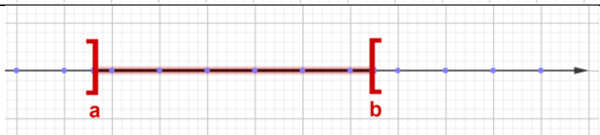
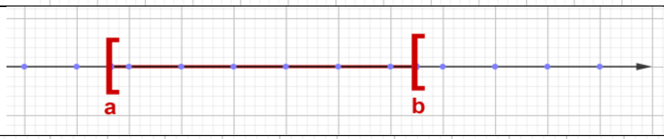
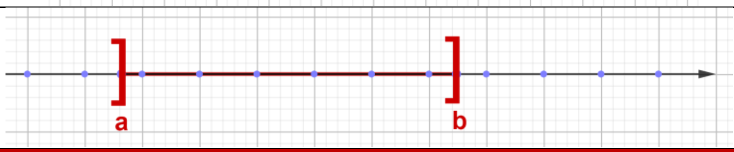
- L'ensemble de tous les nombres réels x vérifiant $a \leq x \leq b$ s'appelle un **intervalle fermé** en a et b et est noté $[a;b]$
- L'ensemble de tous les nombres réels x vérifiant $a < x < b$ s'appelle un **intervalle ouvert** en a et b et est noté $]a;b[$
- L'ensemble de tous les nombres réels x vérifiant $a \leq x < b$ s'appelle un **intervalle semi fermé à gauche** en a ou **semi ouvert à droite en** b et est noté $[a;b[$
- L'ensemble de tous les nombres réels x vérifiant $a < x \leq b$ s'appelle un **intervalle fermé à droite** en b ou **semi ouvert à gauche en** a et est noté $]a;b]$

Remarques

- Les nombres réels a et b sont les bornes des intervalles $[a;b]$; $[a;b[$; $]a;b]$ et $]a;b[$
- Le nombre $b-a$ est appelé "l'amplitude" ou la longueur des intervalles $[a;b]$; $[a;b[$; $]a;b]$ et $]a;b[$

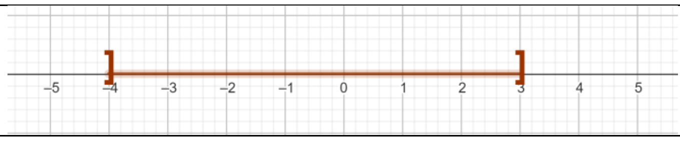
Proposition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Intervalle	Encadrement	Représentation sur la droite graduée
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	

Exemples

Compléter le tableau suivant :

Intervalle	Encadrement	Représentation
$[2;6[$		
	$-3 \leq x < 5$	
		
	$0 < x \leq 1$	

$]-2;4[$		

2 – Intervalles non bornés

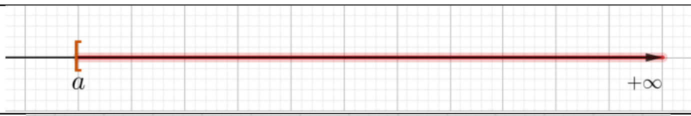
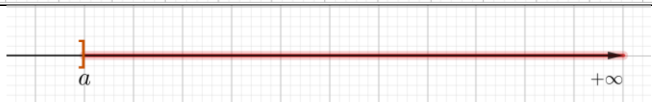
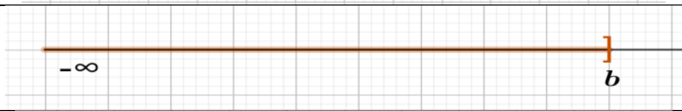
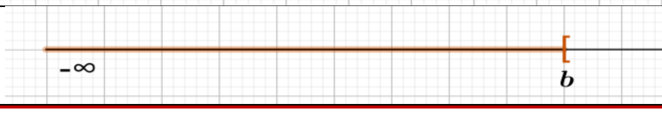
Définition

Soient a et b deux nombres réels.

- L'ensemble de tous les nombres réels x vérifiant $x \geq a$ s'appelle un **intervalle fermé** en a et est noté $[a;+\infty[$
- L'ensemble de tous les nombres réels x vérifiant $x > a$ s'appelle un **intervalle ouvert** en a et est noté $]a;+\infty[$
- L'ensemble de tous les nombres réels x vérifiant $x \leq b$ s'appelle un **intervalle fermé** et est noté $]-\infty;b]$
- L'ensemble de tous les nombres réels x vérifiant $x < b$ s'appelle un **intervalle ouvert** et est noté $]-\infty; b[$

Proposition

Soient a et b deux nombres réels.

Intervalles	Encadrement	Représentation
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty,b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

Exercice corrigé

Résoudre les équations suivantes :

1) $x+4 \geq 0$; 2) $2-x<0$; 3) $2(x+3)-1 \leq x+5$; 4) $\dfrac{x-3}{2} > \dfrac{1-x}{3}$

Réponses

1) $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \Leftrightarrow x \in [-4;+\infty[$

Alors : $S=[-4;+\infty[$

2) $2-x<0 \Leftrightarrow 2<x \Leftrightarrow x \in]2;+\infty[$.

Alors : $S=]2;+\infty[$

3) $2(x+3)-1 \leq x+5 \Leftrightarrow 2x+6-1 \leq x+5$

$\Leftrightarrow 2x-x \leq 5-6+1$

$\Leftrightarrow x \leq 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty;0]$

Alors : $S=]-\infty;0]$

4) $\dfrac{x-3}{2} > \dfrac{1-x}{3} \Leftrightarrow 3(x-3) > 2(1-x)$

$\Leftrightarrow 3x-9 > 2-2x$

$\Leftrightarrow 3x+2x > 2+9$

$\Leftrightarrow 5x > 11$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{11}{5}$

$\Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{11}{5};+\infty\right[$

Alors : $S = \left]\dfrac{11}{5};+\infty\right[$

3 – Union et intersection des intervalles

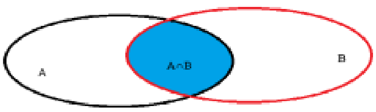
Définition

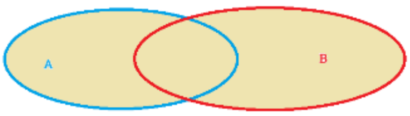
Soit A et B deux ensembles.

- **L'ensemble de tous les éléments communs à A et B** s'appelle **l'intersection de A et B** et est noté $A \cap B$.
  Autrement dit : $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$
- **L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A ou à B** s'appelle **la réunion de A et B** et est noté $A \cup B$.
  Autrement dit : $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Remarque

Si deux ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs, on dit que leur intersection est vide et on note : $A \cap B = \varnothing$.

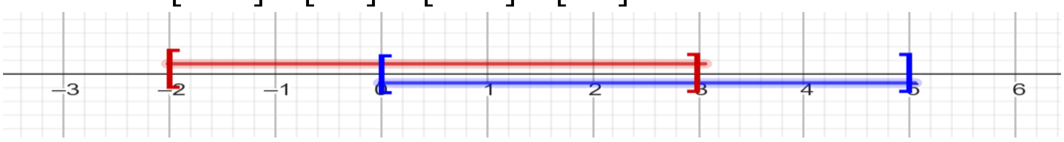




A∪B

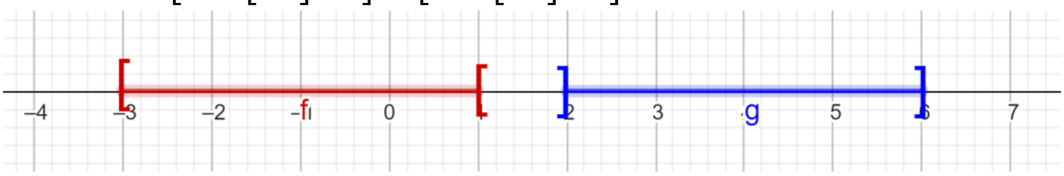
Méthode de détermination de l'intersection et la réunion de deux intervalles

- Déterminer $[-2;3] \cap [0;5]$ et $[-2;3] \cup [0;5]$



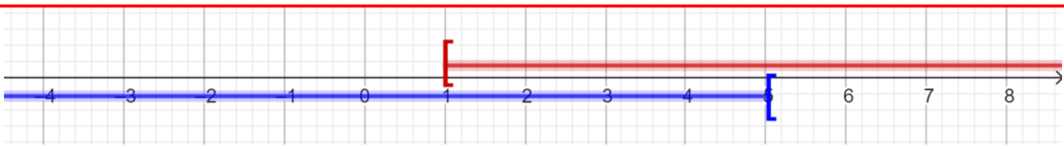
Alors : $[-2;3] \cap [0;5] = [0;3]$ et $[-2;3] \cup [0;5] = [-2;5]$

- Déterminer $[-3;1[\cap]2;6]$ et $[-3;1[\cup]2;6]$



Alors : $[-3;1[\cap]2;6] = \varnothing$ et $[-3;1[\cup]2;6]$ n'est pas un intervalle

- Déterminer $[1;+\infty[\cap]-\infty;5[$ et $[1;+\infty[\cup]-\infty;5[$



Alors : $[1;+\infty[\cap]-\infty;5[=[1;5[$ et $[1;+\infty[\cup]-\infty;5[=]-\infty;+\infty[$

Remarques

- $[0;+\infty[\cup]-\infty;0]=\mathbb{R}$ et $[0;+\infty[\cap]-\infty;0]=\{0\}$
- $]0;+\infty[\cap]-\infty;0[=\varnothing$ et $]0;+\infty[\cup]-\infty;0[=\mathbb{R}^*$
- Si I et J sont des intervalles tels que $I\cap J=\varnothing$, alors $I\cup J$ n'est pas un intervalle.

II - Valeur absolue

1 – Distance entre deux réels

Définition

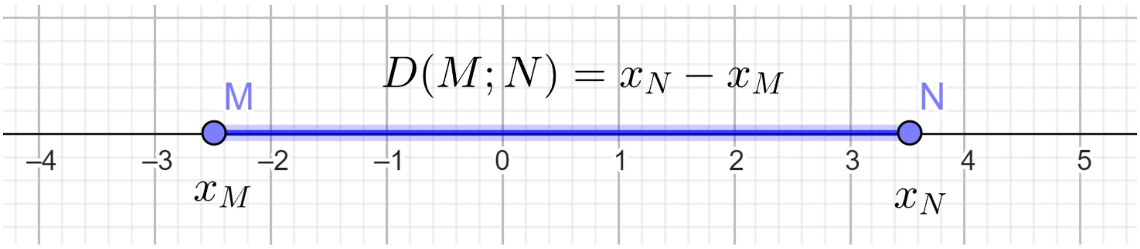
La distance entre deux nombres réels est **la différence entre le plus grand et le plus petit** .

Si x et y sont deux nombres réels tels que $x\geq y$, on a : $D(x;y)=x-y$

Exemples

- $D(2,5;10)=10-2,5=7,5$
- $D(\sqrt{3};7)=7-\sqrt{3}$
- $D(-15;-2)=-2-(-15)=15-2=13$

Interprétation géométrique



2 – Valeur absolue d'un nombre réel

Définition

La valeur absolue d'un nombre réel x, notée $|x|$, est **la distance entre** x et 0.

Autrement dit : $|x|=\begin{cases} x \ ; si\ x\geq 0 \\ -x \ ; si\ x<0 \end{cases}$

Exemples

- $|13|=13$ car $13\geq 0$
- $|-24|=24$ car $-24<0$
- $|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$ car $1-\sqrt{3}<0$
- $|x^2|=x^2$ car $x^2\geq 0$ pour tout réel x.

Remarque

$D(a;b)=|a-b|$ pour tous les réels a et b

Proposition

Soit x un nombre réel.

- ★ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ★ $|-x| = |x|$
- ★ $\sqrt{x^2} = |x|$
- ★ $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

3 – Représentation des intervalles de la forme $[a-r;a+r]$ sur la droite graduée

Proposition 1

Soient a un réel et r un réel strictement positif $(r > 0)$.

Les intervalles $[a-r;a+r]$ et $]a-r;a+r[$ ont pour **centre** le nombre réel a et ont pour **rayon** r

Exemples

- Le centre de l'intervalle $[a-2;a+2]$ est a et son rayon est 2
- Le centre de l'intervalle $]b-\sqrt{2};b+\sqrt{2}[$ est b et son rayon est $\sqrt{2}$

Proposition 2

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Les intervalles $[a;b]$ et $]a;b[$ ont pour centre le nombre réel $c = \dfrac{a+b}{2}$ et ont pour rayon $r = \dfrac{b-a}{2}$

Remarques

- $[a;b] = [c-r;c+r]$ où $c = \dfrac{a+b}{2}$ et $r = \dfrac{b-a}{2}$
- $]a;b[=]c-r;c+r[$ où $c = \dfrac{a+b}{2}$ et $r = \dfrac{b-a}{2}$

Exemples

- Le centre de $[-3;7]$ est $c = \dfrac{-3+7}{2} = 2$ et son rayon est $r = \dfrac{7-(-3)}{2} = 5$
- Le centre de $]1;15[$ est $c = \dfrac{1+15}{2} = 8$ et son rayon est $r = \dfrac{15-1}{2} = 7$

Proposition 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On a :

- ★ $x \in [a-r;a+r] \Leftrightarrow |x-a| \leq r$
- ★ $x \in]a-r;a+r[\Leftrightarrow |x-a| < r$

Exemples

- L'ensemble des réels x tels que $|x-2| \leq 3$ est le segment $[2-3;2+3] = [-1;5]$
- L'ensemble des réels x tels que $|x+3| \leq 1$ est le segment $[-3-1;-3+1] = [-4;-2]$

III – Equations et inéquations utilisant des valeurs absolues

Proposition 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- ★ Si $b \geq 0$, $|x-a| = b \Leftrightarrow x-a = b$ ou $x-a = -b$

$\Leftrightarrow x = a + b$ ou $x = a - b$

★ Si $b < 0$, l'équation $|x - a| = b$ n'admet pas de solutions c'est-à-dire que $S = \varnothing$

Exemples

Résoudre les équations suivantes :

$a)\ |x-2| = 5 \quad ; b)\ |x+4| = 2 \quad ; c)\ |x-1| = -21 \quad ; d)\ |x+1| = |3-x|$

Réponses

$a)\ |x-2| = 5 \Leftrightarrow x - 2 = 5$ ou $x - 2 = -5$

$\Leftrightarrow x = 2 + 5$ ou $x = 2 - 5$

$\Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -3$

Alors : $S = \{-3; 7\}$

$b)\ |x+4| = 2 \Leftrightarrow x + 4 = 2$ ou $x + 4 = -2$

$\Leftrightarrow x = 2 - 4$ ou $x = -2 - 4$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -6$

Alors : $S = \{-6; -2\}$

$c)\ |x-1| = -21$ Alors : $S = \varnothing$ car $-21 < 0$

$d)\ |x+1| = |3-x| \Leftrightarrow x + 1 = 3 - x$ ou $x + 1 = x - 3$

$\Leftrightarrow x + x = 3 - 1$ ou $x - x = -3 - 1$

$\Leftrightarrow 2x = 2$ ou $0 = -4$ (Impossible)

$\Rightarrow x = 1$

Alors : $S = \{1\}$

Proposition 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

★ $|x - a| \le r \Leftrightarrow a - r \le x \le a + r$

$\Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$

★ $|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$

$\Leftrightarrow x \in]a - r; a + r[$

Exemples

Résoudre les inéquations suivantes :

$a)\ |x-2| \le 2{,}5 \quad ; \quad b)\ |x+3| \le 1 \quad ; \quad c)\ |x-5| < 2 \quad ; \quad d)\ |x+1{,}5| < 3$

Réponses

$a)\ |x-2| \le 2{,}5 \Leftrightarrow -2{,}5 \le x - 2 \le 2{,}5$

$\Leftrightarrow 2 - 2{,}5 \le x \le 2 + 2{,}5$

$\Leftrightarrow -0{,}5 \le x \le 4{,}5$

$\Leftrightarrow x \in [-0{,}5; 4{,}5]$

Alors : $S = [-0{,}5; 4{,}5]$

$b)\ |x+3| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x + 3 \le 1$

$\Leftrightarrow -1 - 3 \le x \le 1 - 3$

$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq -2$

$\Leftrightarrow x \in [-4;-2]$

Alors : $S = [-4;-2]$

$c)\ |x-5| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-5 < 2$

$\Leftrightarrow -2+5 < x < 2+5$

$\Leftrightarrow 3 < x < 7$

$\Leftrightarrow x \in]3;7[$

Alors : $S =]3;7[$

$d)\ |x+1,5| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+1,5 < 3$

$\Leftrightarrow -3-1,5 < x < 3-1,5$

$\Leftrightarrow -4,5 < x < 1,5$

$\Leftrightarrow x \in]-4,5;1,5[$

Alors : $S =]-4,5;1,5[$