Exercice 1

1) Exprimer les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs "$\exists$" et "$\forall$" :

- P₁ : « il n'existe aucun rationnel solution de l'équation $x^2+x+1=0$ »
- P₂ : « Pour tout entier naturel non nul n, 2^n est un entier pair »
- P₃ : « Tout entier naturel divisible par 8 est divisible par 2 »
- P₄ : « Pour tous les réels x et y tels que $x^2<y^2$, on a : $x<y$ »
- P₅ : « Pour chaque réel y il existe un unique entier n tels que : $n\le x<n+1$ »

2) Donner la valeur de vérité de chacune des propositions précédentes.

Exercice 2

1) Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes :

- Q_1 : « $(\forall x\in\mathbb{R});\ \sqrt{x^2+1}>x$ »
- Q_2 : « $(\exists n\in\mathbb{Z}):\ n^2=5$ »
- Q_3 : « $(\forall y\in\mathbb{R}^*)(\exists x\in\mathbb{R}):\ x^2-xy+y^2=0$ »
- Q_4 : « $(\forall x\in\mathbb{R}):\left[x^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\right]$ »
- Q_5 : « $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2):\left[(xy+1=x+y)\Leftrightarrow(x=1\,ou\ y=1)\right]$ »

2) Donner la valeur de vérité de chacune des propositions précédentes

Exercice 3

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ n^3-n$ est un multiple de 6.

2) Soient $a,\ b,\ c$ et d des nombres rationnels tels que : $ad-bc\neq 0$.

Montrer que : $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$

3) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right),\ \dfrac{n^2+1}{n^2-1}\notin\mathbb{N}$

4) Montrer que : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right),\ (xy+1=x+y)\Leftrightarrow(x=1\ ou\ \ y=1)$

5) Montrer que : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\right),\ \left(\dfrac{x+y^2+5}{2}=2\sqrt{x}+y\right)\Leftrightarrow(x=4\text{ ou }\ y=1)$

6) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right):\ 3/n^3+2n$

Exercice 4

Montrer que :

1) $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right):\ \sqrt{\dfrac{x^2+3x+1}{5}}\ge\sqrt{x}$

2) $\left(\forall(x,y)\in\left]1,+\infty\right[\times\left]1,+\infty\right[\right):\ \left(x\neq y\Rightarrow x^2-2x\neq y^2-2y\right)$

3) $\left(\forall x\in[-2,2]\right):\ \sqrt{4-x^2}-x\le 2\sqrt{2}$

4) $\left(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\right):\ \left(x\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{3x}{x+1}\neq 1\right)$

5) $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right):\left[x+y\le z\Rightarrow\left(x\le\dfrac{1}{2}z\text{ ou }\ y\le\dfrac{1}{2}z\right)\right]$

6) $\left(\forall x \in [1,+\infty[\right): x \geq 2\sqrt{x-1}$

7) $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right): \left(x^{2}+2\sqrt{x}-3>0 \Rightarrow x>1\right)$

8) $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{2}\right): \left(a+b=ab \Rightarrow a=1 \text{ ou } b=1\right)$

Exercice 5

Montrer que :

1) $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right): 3^{2n}-5^{n}$ est un multiple de 4

2) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right): 11 / 3^{2n}+2^{6n-5}$

3) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right): \sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^{2}$

4) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right): \sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

5) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right): \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} k^{2}=\dfrac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}$

6) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right): \sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1}=(n-1) \times 2^{n}+1$

Exercice 6

1) Montrer que : $\left(\forall k \in \mathbb{N}^{*}\right): \sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

2) Prouver que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right): \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{n+1}-1$

3) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right): 2\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$

4) Montrer par récurrence que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right): \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$

5) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right): 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

https://www.diamamath.com

MATHÉMATIQUES
POUR TOUS