Exercice 1

Donner la négation de la proposition suivante et donner sa valeur de vérité, dans chacun des cas suivants :

$P:"(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ \sqrt{7n+15}\notin\mathbb{N}"$

$Q:"(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R}): x^2+yx+1>0"$

$R:"(\exists a\in\,]0,+\infty[)(\forall x\in\,]0,1[),\ \dfrac{x}{1-x}<a"$

Exercice 2

On considère l'ensemble $E=\{-1,1,3,15\}$ et les propositions $P:"(\forall n\in E)(\exists p\in E),\ n\leq p"$ et

$Q:"(\exists n\in E)(\forall p\in E),\ n>p+1"$

Donner les valeurs de vérité des propositions P et Q

Exercice 3

Soient a, b et c trois réels.

Montrer que : $\left(abc=1 \text{ et } a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\Rightarrow(a=1 \text{ ou } b=1 \text{ ou } c=1)$

Exercice 4

1) Soient a, b et c trois réels.

a) Montrer que : $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$

b) En déduire que : $(a+b+c)^2\geq 3(ab+ac+bc)$

2) Soient $a,\ b,\ c,\ x,\ y$ et z des réels.

Montrer que : $(ax+by+cz)^2\leq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

3) Soient α, β et γ trois réels positifs tels que $\alpha+\beta+\gamma=1$.

a) Montrer que : $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\gamma}+\gamma\sqrt{\alpha}\leq\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$

b) En déduire que : $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\gamma}+\gamma\sqrt{\alpha}\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 5 :

Montrer par récurrence les propositions suivantes :

1) $(\forall n\in\mathbb{N}),\ n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6

2) 1) $(\forall n\in\mathbb{N}),\ \sum_{k=1}^{k=2^n}\dfrac{1}{k}\geq 1+\dfrac{n}{2}$

3) $(\forall n\in\mathbb{N})$, 7 divise $3^{2n+3}+2^{n+3}$

4) 3) $(\forall n\in\mathbb{N})$, 11 est un diviseur de $9^{n+1}+2^{6n+1}$

5) $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), \sum_{k=1}^{k=n} k\left(n-k\right)=\dfrac{n\left(n^2-1\right)}{6}$

6) $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), \sum_{k=1}^{k=n} k2^k=2+\left(n-1\right)2^{n+1}$

Exercice 6 :

1) Soit a un réel strictement positif.

Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right), \left(1+a\right)^n\geq 1+na$

2) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

a) $2^n\geq 1+n$

b) $3^n\geq 1+2n$

c) $\left(1+n\right)^n\geq 1+n^2$

d) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geq 2$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $f(0)=3$ et $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ f(n+1)=2f(n)+5$

1) Déterminer $f(1)$ et $f(2)$

2) Démontrer par récurrence que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ f(n)=2^{n+3}-5$

Exercice 8

Pour tout entier naturel n, on pose : $f(n)=10^{3n+2}+10^{3n+1}+1$

1) Calculer $f(0)$ et $f(1)$

2) Montrer qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $f(1)-f(0)=111k$

3) Calculer $f(n+1)$ en fonction de $f(n)$

4) En déduire que $f(n)$ est divisible par 111 pour tout $n\in\mathbb{N}$

Exercice 9

1) Montrer, par disjonction des cas, que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ E\left(\dfrac{2n}{3}\right)+E\left(\dfrac{\left(n-1\right)^2}{3}\right)=E\left(\dfrac{n^2}{3}\right)$

2) En déduire, en fonction de n, la somme $S_n=\sum_{k=0}^{k=n} E\left(\dfrac{2k}{3}\right)$

Exercice 10

Montrer par récurrence que :

1) $4^{3n}-4^n$ est divisible par 5, pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7, pour tout $n\in\mathbb{N}$

3) $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17, pour tout $n\in\mathbb{N}$

4) $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9, pour tout $n \in \mathbb{N}$

5) $2^{10n-7} + 3^{5n-2} - 2$ est divisible par 11, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

6) $3^{5n} + 4^{5n+2} + 5^{5n+1}$ est divisible par 11, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 11

1) Soients x, y et z trois réels tels que $x \geq 0$, $y \geq 1$ et $z \geq 2$.

Montrer que : $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \dfrac{x+y+z}{2}\right) \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } y = 2 \text{ ou } z = 3)$

2) Soients x, y et z trois rationnels tels que $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 18$.

Montrer que : $x \neq y$ ou $y \neq z$ ou $z \neq x$

3) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{y+1} - \sqrt{y}\right) \Rightarrow x = y$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$, l'équation : $\sqrt{x+1} + \sqrt{5} = \sqrt{6} + \sqrt{x}$