



Exercice 1

Soit P , Q et R trois propositions. Dresser les tableaux de vérité des propositions suivantes :

- $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \bar{Q})$
- $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R))$

Exercice 2

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction définie sur I . Exprimer à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

- f s'annule sur I
- f est constante sur I
- f est strictement croissante sur I

Exercice 3

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse :

P : « $(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 > 0$ »

Q : « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x > y^2$ »

Exercice 4

Soit x un nombre réel positif tel que : $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 2 > 0$

- Montrer que : $x + 2 \leq \sqrt{3 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 1)^2 \leq 3$
- En raisonnant par l'absurde, montrer que : $\sqrt{3 + \sqrt{3}} < 2 + x$

Exercice 5

- Soit x et y deux nombres réels de $] -1, 1[$. Montrer que $\frac{x + y}{1 + xy} \in] -1, 1[$
- Soient x , y , α et β des nombres réels strictement positifs. Montrer que :

$$x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{\alpha x + \beta y}{\beta x + \alpha y}$$

Exercice 6

Déterminer la négation puis la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- P : « $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), x \leq y$ »
- Q : « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}), n \leq x < n + 1$ »
- R : « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}), n > x$ »
- S : « $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), xy = 0 \wedge (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$ »
- T : « $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}), ax^2 + 2x - a \neq 0$ »



Exercice 7

Démontrer que pour tout x et y de l'ensemble $\mathbb{R} - \{-3\}$, on a : $(x \neq y) \Leftrightarrow \left(\frac{4x-1}{x+3} \neq \frac{4y-1}{y+3}\right)$

Exercice 8

1) Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que la proposition suivante est fautive :

$$\left(\forall x \in]0,1[\right), \frac{3}{x(1-x^2)} < 1$$

2) Montrer, à l'aide des équivalences successives, que la proposition suivante est vraie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}, x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

3) Montrer, à l'aide de la contraposée, que la proposition suivante est vraie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left[(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1} \right]$$

4) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 9

Soit a , b et c trois réels strictement positifs tels que : $ab + bc + ca = 1$

1) Montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$, puis déduire que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$

2) Montrer par l'absurde que : $a + b \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $b + c \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $c + a \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 10

1) a) Soit $a \in]0, +\infty[$. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), (1+a)^n \geq 1 + an$

b) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{5^{n+1} + 2 \times 3^n + 1}{8} \in \mathbb{N}$

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

1) Calculer S_1 , S_2 et S_3 sous forme de fractions irréductibles

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = \frac{n}{2n+1}$