Chapitre 1 : Raisonnement par récurrence – Limites des suites

Raisonnement par récurrence

Exercice 1

On considère la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ pour tout entier naturel n.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - \frac{5}{2^n}$

Exercice 2

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 3 \end{cases}$

1) Calculer v_1, v_2 et v_3. On exprimera chacun de ces termes sous la forme irréductible.

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)^2$

Exercice 3

Soit (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \dfrac{w_n}{1+w_n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer w_1, w_2, w_3 et w_4

2) Conjecturer l'expression de w_n

3) Démontrer par récurrence la validité de cette conjecture

Exercice 4

Soit (a_n) la suite définie par : $\begin{cases} a_0 = 1 ; a_1 = 3 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer a_2, a_3, a_4 et a_5

2) Démontrer par récurrence (forte) que pour tout entier naturel n, $a_n = 2n + 1$

Exercice 5

On considère la suite numérique (c_n) définie par : $c_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = \dfrac{c_n}{\sqrt{1+c_n^2}}$

1) Calculer c_2 et c_3

2) Conjecturer une expression de c_n en fonction de n

3) Démontrer cette conjecture par récurrence

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 3}{3u_n + 1}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{8+3n}{4+3n}$

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

Prouver par récurrence que :

1) Tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

2) La suite (u_n) est croissante

3) Pour tout entier naturel n, $u_n < 2$

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

Exercice 10

On considère (x_n) la suite numérique définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{5x_n + 3}{x_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} = 5 - \frac{12}{x_n + 3}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq x_n < 3$

c) Etudier le sens de variation de la suite (x_n)

Exercice 11

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = -1\ et\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = \frac{4 + u_n}{5 - u_n}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ -1 \leq u_n < 2$

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 12

Montrer par récurrence les propositions suivantes :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2); 5^n \geq 4^n + 3^n$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

4) $\forall n \in \mathbb{N};\ \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} k \times \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n) \times 4^{n+1}}{5^n}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}, 1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

7) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

Exercice 13

Montrer par récurrence que :

1) $4^{3n}-4^n$ est divisible par 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17, pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) $4^n+15n-1$ est divisible par 9, pour tout $n \in \mathbb{N}$

5) $2^{10n-7}+3^{5n-2}-2$ est divisible par 11, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

6) $3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ est divisible par 11, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 14

I- Montrer que la suite (u_n) est majorée par M dans les cas suivants :

1/ $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n=\dfrac{2n+1}{3n+1}$; $M=1$

2/ $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n=\sqrt{1+\dfrac{3}{n+1}}$; $M=2$

II- Montrer que la suite (v_n) est minorée par m, dans les cas suivants :

1/ $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$; $m=\dfrac{1}{2}$

2/ $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n=2n^2+4n+3$; $m=3$

3/ $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n=\dfrac{\sqrt{n+2}-1}{n+1}$; $m=0$

III- Soit (w_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n=2(-1)^n+cos(n+1)$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); -3 \le w_n \le 3$

Exercice 15

Soit (x_n) la suite définie par : $\begin{cases} x_0 \in]0;1[\\ x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{n+1} \end{cases}$. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0<x_n<2$

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par : $u_n=\dfrac{2+\cos(n)}{3-\sin(\sqrt{n})}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{4} \le u_n \le \dfrac{3}{2}$

Limite d'une suite

Exercice 17

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=n^2$

1) Résoudre dans $\mathbb{N}$, les inéquations : a) $u_n \geq 100$; b) $u_n \geq 10000$; c) $u_n \geq 10^8$

2) Soit A un réel quelconque. Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation : $u_n \geq A$

3) Que peut-on déduire sur la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 18

On considère la suite réelle (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 3-2n$

1) Résoudre dans $\mathbb{N}$, les inéquations : a) $u_n \leq -97$; b) $u_n \leq -10507$; c) $u_n \leq -9999997$

2) Soit A un réel quelconque. Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation : $u_n \leq A$

3) Que peut-on déduire sur la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 19

On considère la suite réelle (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \begin{cases} -1 \text{ ; si } n \text{ est multiple de } 5 \\ \sqrt{n} \text{ ; sinon} \end{cases}$

Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq +\infty$

Exercice 20

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2-3n+5$; $\lim\limits_{n\to+\infty} +4n-n^3+2n^2-12$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-n}{3n+4}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-3}{5n^2+n-1}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3n^2+n+6}{2n^2+3n-7}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3+2n-1}{3n^2-4n+2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+5}-n+1$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2+3}-n+5$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^3+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+n+2}-2n$; $\mathit{lim}_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{2+3\sqrt{n+5}}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1}-\dfrac{n-2}{1+\sqrt{n+1}}$.

Exercice 21

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n+\cos(n+1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sin(2n)+7n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(n^2+n+1\right)-5n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 10\sin(2-n)-n^2+n-2$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(7n)}{1+n^2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\sin(-2n)}{n+2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)+\cos(-n)}{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+(-1)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$;

Exercice 22

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n+2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,265)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,2)^n+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2^n}{3^n+2^n}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n}(0,3)^k$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n}(1,2)^k$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^k$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n+7^n}{7^n-4^n}$.

Exercice 23

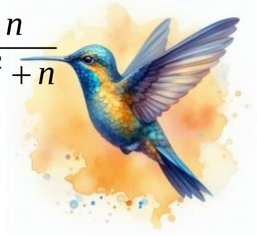
Soit (u_n) la suite m=numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 24

On considère la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \dfrac{n}{n^2+3} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$



1) Calculer $S_1,\ S_2\ et\ S_3$

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{n^2}{n^2+n} \le S_n \le \dfrac{n^2}{n^2+1}$

3) En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 25 (Exercice 3 du bac Amérique du nord Sujet 2 du 22 mai 2024)

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $g(x) = 2x - x^2$

1) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)\ et\ g(1)$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel non nul n.

a) Calculer $u_1\ et\ u_2$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d) Déterminer la limite L de la suite (u_n).

Exercice 26

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > \dfrac{1}{2}$

3) a) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \ge 1$

4) Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = \dfrac{2}{2u_n - 1}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Déterminer v_n en fonction de n

c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n = \dfrac{2+v_n}{2v_n}$ et en déduire u_n en fonction de n

5) Calculer les limites des suites (v_n) et (u_n)

Exercice 27

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{4}{u_n}\right)$ pour tout entier naturel n.

1/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

2/ Etudier la monotonie da la suite (u_n) et en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq 3$

3/ a/ Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{u_n}\right)(u_n - 2)$

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{6}(u_n - 2)$

c/ En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n - 2 \leq \frac{1}{6^n}$

d/ Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$