



## I - Propositions – Fonctions propositionnelles

### 1 - La proposition

#### **Définition :**

Une proposition est un énoncé (un texte) qui a un sens, pouvant être vrai ou faux. Elle est souvent notée par les lettres : p, P, q, Q, r, R...

La valeur de vérité d'une proposition est notée V ou 1 lorsqu'elle est vraie, et par F ou 0 lorsqu'elle est fausse.

#### **Remarque :**

Toute proposition peut être vraie ou fausse, mais jamais elle ne peut être vraie et fausse en même temps. On représente la vérité d'une proposition P dans un tableau appelé « tableau de vérité de la proposition P » comme suit :

P
V
F

ou

P
1
0

#### **Exemples :**

- P : «  $4 + 5 = 9$  » est une proposition vraie
- Q : «  $\sqrt{10} < \pi$  » est une proposition fausse
- R : «  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  » est une proposition fausse
- T : « 2 est un entier naturel pair et premier » est une proposition vraie

### 2 - Fonction propositionnelle

#### **Définition :**

Une fonction propositionnelle est un énoncé ayant un sens, qui contient une variable ou plusieurs variables appartenant à un ensemble E.

Elle devient une proposition lorsqu'on remplace la variable ou les variables par des éléments donnés de E.

On note souvent une fonction propositionnelle par :  $P(x)$ ;  $P(x, y)$ ;  $P(x, y, z)$  où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des éléments de E

#### **Exemples :**

- $P(n) : "n \in \mathbb{N}; n^2 - n = 2"$  est une fonction propositionnelle. On ne peut pas juger sa véracité.  
Si  $n = 2$ ,  $P(2)$  est vraie. Mais si  $n \neq 2$ ,  $P(3)$  est fausse
- $Q(x, y) : "(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 1 < y"$  est une fonction propositionnelle.  $Q(1, 5)$  est une proposition vraie,  
Par contre  $Q(10, 6)$  est fausse
- $R(x, y, z) : "(x, y, z) \in \mathbb{N}^3; x^2 + y^2 = z^2"$  est une fonction propositionnelle.  $R(3, 4, 5)$  est une  
Proposition vraie, et  $R(1, 4, 3)$  est fausse

#### **Remarque :**

- 1- Une fonction propositionnelle devient une proposition lorsqu'on remplace la variable ou les variables par des éléments donnés de E.
- 2- La valeur de vérité de  $P(x)$  dépend de  $x$

### 3 - Les quantificateurs



### 3.1. Le quantificateur universel

#### Définition :

L'expression « quel que soit » s'appelle **le quantificateur universel** et se note  $\forall$ .

Si " $x \in E; P(x)$ " est une fonction propositionnelle, l'expression « quel que soit  $x \in E ; P(x)$  est vraie »

se note : «  $(\forall x \in E); P(x)$  » et se lit « Quel que soit  $x \in E ; P(x)$  »

L'expression «  $(\forall x \in E); P(x)$  » est une proposition et non pas une fonction propositionnelle.

#### Exemples :

- La proposition « Tout entier naturel est pair ou impair » s'écrit «  $(\forall n \in \mathbb{N}); n \text{ est pair ou impair}$  »
- La proposition « le carré de chaque nombre réel est positif ou nul » s'écrit «  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0$  »
- La proposition «  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0$  » est vraie
- La proposition «  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + x + 3 > 0$  » est vraie
- La proposition «  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}$  » est fausse

#### Remarque :

- Pour dire qu'une proposition est vraie il faut montrer qu'elle est vraie
- Pour dire qu'une proposition est fausse il suffit de donner un contre-exemple

### 3-2- Le quantificateur existentiel

#### Définition :

L'expression « il existe au moins » s'appelle **le quantificateur existentiel** et se note  $\exists$ .

Si «  $x \in E; P(x)$  » est une fonction propositionnelle, l'expression « il existe au moins  $x \in E : P(x)$  est vraie » se note : «  $(\exists x \in E); P(x)$  »

se note : «  $(\exists x \in E); P(x)$  »

L'expression «  $(\exists x \in E); P(x)$  » est une proposition.

L'expression « il existe un unique  $x \in E : P(x)$  » se note «  $(\exists! x \in E); P(x)$  »

#### Exemples :

- La proposition « il existe au moins un entier naturel  $n$  tel que  $\sqrt{n^2 + 7}$  est un entier naturel » s'écrit «  $(\exists n \in \mathbb{N}); \sqrt{n^2 + 7} \in \mathbb{N}$  »
- La proposition « il existe un unique nombre réel  $x$  tel que  $2x^2 - x - 3 = 0$  » s'écrit «  $(\exists! x \in \mathbb{R}); 2x^2 - x - 3 = 0$  »
- La proposition «  $(\exists x \in \mathbb{R}); 2|x - 3x| + 5x = 0$  » est vraie
- La proposition «  $(\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2); 2x - 3y = 1$  » est vraie
- La proposition «  $(\exists p \in \mathbb{N}, p > 1); \frac{p+1}{p} \in \mathbb{N}$  » est fausse

### 3-3- Propositions avec plusieurs quantificateurs

#### Proposition 1

Soit «  $(x, y) \in E^2; P(x, y)$  » une fonction propositionnelle. On a :

- Les 3 propositions suivantes ont la même vérité :



- ❖  $\forall (x, y) \in E^2; P(x, y)$
- ❖  $(\forall x \in E)(\forall y \in E); P(x, y)$
- ❖  $(\forall y \in E)(\forall x \in E); P(x, y)$

➤ Les 3 propositions suivantes ont la même vérité :

- ❖  $(\exists (x, y) \in E^2); P(x, y)$
- ❖  $(\exists x \in E)(\exists y \in E); P(x, y)$
- ❖  $(\exists y \in E)(\exists x \in E); P(x, y)$

### Proposition 2

- On peut permuter les quantificateurs de même nature dans une proposition contenant plusieurs quantificateurs sans changer sa vérité :

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E); P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y \in E)(\forall x \in E); P(x, y)$$

$$(\exists x \in E)(\exists y \in E); P(x, y) \Leftrightarrow (\exists y \in E)(\exists x \in E); P(x, y)$$

- On ne peut pas permuter les quantificateurs de natures différentes : En général, les propositions suivantes ne sont pas équivalentes :

$$(\forall x \in E)(\exists y \in E); P(x, y) \text{ et } (\exists y \in E)(\forall x \in E); P(x, y)$$

### Exemples :

- La proposition «  $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x + y = 0$  » est vraie
- La proposition «  $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x + y = 0$  » est fausse

## II – Opérations sur les propositions

### 1. Négation d'une proposition

#### Définition :

La négation d'une proposition  $P$ , est la proposition qui est fausse lorsque  $P$  est vraie, et qui est vraie lorsque  $P$  est fausse. On la note :  $\bar{P}$  ou  $\neg P$

$P$	$\bar{P}$
1	0
0	1

Tableau de vérité de la négation

### Exemples :

- $P : "2 \leq -6"$  ;  $\bar{P} : "2 > -6"$
- $Q : "\pi^2 = 10"$ ;  $\bar{Q} : "\pi^2 \neq 10"$

#### Proposition

- ❖ La négation de la proposition «  $(\forall x \in E); P(x)$  » est la proposition «  $(\exists x \in E); \bar{P}(x)$  »
- ❖ La négation de la proposition «  $(\exists x \in E); P(x)$  » est la proposition «  $(\forall x \in E); \bar{P}(x)$  »

### Exemples :

- La négation de la proposition «  $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 = 0$  » est la proposition «  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + x + 1 \neq 0$  »



- La négation de la proposition «  $(\forall n \in \mathbb{Z}); \sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{N}$  » est la proposition «  $(\exists n \in \mathbb{Z}); \sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$  »
- La négation de la proposition «  $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}_+^*): x + y > 0$  » est la proposition «  $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+^*): x + y \leq 0$  »

## 2 – La conjonction

### Définition

La conjonction des deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement lorsque les propositions P et Q sont vraies en même temps. On la note (*P et Q*) ou  $(P \wedge Q)$

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tableau de vérité de la conjonction  $P \wedge Q$

### Exemples :

- La proposition « (3 est un entier impair) et (21 est premier) » est fausse
- La proposition « ( $\pi$  est un nombre irrationnel) et  $\left( (\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x + \frac{1}{x} \geq 2 \right)$  » est vraie

## 3. La disjonction

### Définition :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition, qui est fausse uniquement lorsque les propositions P et Q sont fausses en même temps. On la note : (*P ou Q*) ou  $(P \vee Q)$

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tableau de vérité de la disjonction  $P \vee Q$

### Exemples :

- La proposition « (3 est un entier impair) ou (21 est premier) » est vraie
- La proposition « ( $\pi$  est un nombre irrationnel) ou  $\left( (\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x + \frac{1}{x} \geq 2 \right)$  » est vraie
- La proposition « ( $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel) ou  $\left( (\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x + \frac{1}{x} < 2 \right)$  » est fausse



### Propriété :

La proposition  $(\bar{P} \text{ ou } Q)$  est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse

Démonstration :

Pour démontrer cette proposition on dresse le tableau de vérité de  $(\bar{P} \text{ ou } Q)$

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{P} \text{ ou } Q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Donc La proposition  $\bar{P} \text{ ou } Q$  est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse

## 4. L'implication

### Définition :

La proposition  $(\bar{P} \text{ ou } Q)$ , qui est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse, s'appelle « P implique Q » et se note  $(P \Rightarrow Q)$

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tableau de vérité de  $(P \Rightarrow Q)$

### Exemples :

- La proposition « (5 est un entier premier)  $\Rightarrow$  (1 est un entier premier) » est fausse
- La proposition « (1 est un entier premier)  $\Rightarrow$  (7 est un entier premier) » est vraie
- La proposition « (1 est un entier premier)  $\Rightarrow$  (10 est un entier premier) » est vraie

### Propriété :

Dans l'implication  $(P \Rightarrow Q)$  :

- Q est une condition nécessaire pour P
- P est une condition suffisante pour Q

## 5. L'équivalence

### Définition :

L'équivalence des deux propositions P et Q est la proposition, qui est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité. On la note  $(P \Leftrightarrow Q)$  et on lit « P équivalente à Q »

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
---	---	-----------------------



1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tableau de vérité de  $(P \Leftrightarrow Q)$ **Exemples :**

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q)$  est une proposition vraie.

Pour montrer cela on doit dresser son tableau de vérité

P	Q	$\bar{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \text{ ou } Q$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Donc cette proposition est toujours vraie.

- $(51 \text{ est premier}) \Leftrightarrow (5 > 27)$  est une proposition vraie
- $(51 \text{ est impair}) \Leftrightarrow (15 > 127)$  est une proposition fausse

**III - Lois logiques****Définition :**

Une loi logique est une proposition, constituée de plusieurs propositions, qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.

**Remarque :**

- Pour montrer qu'une proposition est une loi logique, on utilise les tableaux de vérité
- Les lois logiques sont les bases des raisonnements

**Propriété :**

Soit P, Q et R trois propositions. Alors les propositions suivantes sont des lois logiques :

- ❖  $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$  : (La conjonction est commutative)
- ❖  $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$  : (La disjonction est commutative)
- ❖  $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$  : (l'équivalence est commutative)
- ❖  $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$  : (La conjonction est distributive par rapport à la disjonction)
- ❖  $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$  : (La distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction)
- ❖ Lois de Morgan :
  - $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$
  - $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$
- ❖  $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$
- ❖  $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$  : (L'implication est transitive)



$$\diamond \overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \bar{Q}) : (\text{La négation de l'implication})$$

### Exercice :

Parmi les propositions suivantes, laquelle est une loi logique ?

$$1/ \overline{[(P \text{ et } Q) \text{ ou } (\bar{P} \text{ et } \bar{Q})]} \Leftrightarrow Q$$

$$2/ [P \Rightarrow (Q \text{ et } \bar{Q})] \Leftrightarrow \bar{P}$$

## IV - Les raisonnements

### 1. Raisonnement par déduction

Le principe de déduction est le plus utilisé en mathématiques :

**Si  $P$  est vraie et  $P \Rightarrow Q$  est vraie, alors  $Q$  est vraie**

### Exemple :

Montrer que, pour tout réel  $x$  on a :  $x^2 - 4x + 5 > 0$

En effet, soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x$  vérifie l'inéquation  $x^2 - 4x + 5 > 0$  alors on :  $\Delta = -4 < 0$  donc le trinôme  $x^2 - 4x + 5$  a le même signe que  $a = 1$ . D'où  $x^2 - 4x + 5 > 0$  cqfd

### 2. Raisonnement par disjonction des cas

Pour démontrer que certaines propositions sont vraies on sera amené à distinguer les cas. Ce raisonnement est appelé : **Raisonnement par disjonction des cas**

### Exemples :

1) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{n(n+1)}{2}$  est un entier naturel

Pour montrer cette proposition : on distinguera les deux cas :  $n$  pair et  $n$  impair

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation :  $|x - 2| - 2|3 + x| = 4$

### 3. Raisonnement par contraposée

Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. La proposition  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$  est une loi logique. Donc les deux propositions  $(P \Rightarrow Q)$  et  $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$  ont la même vérité.

Le raisonnement par contraposée consiste à : **Montrer  $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ , pour montrer que  $(P \Rightarrow Q)$  est vraie**

### Exemple :

Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n^2$  est pair alors  $n$  est pair

### 4. Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant : **Pour montrer  $C$ , on suppose à la fois que  $P$  est vraie et que  $Q$  est fausse et cherche une contradiction** ; ainsi si  $P$  est vraie alors  $Q$  doit être vraie et donc  $(P \Rightarrow Q)$  est vraie

### Exemple :

1) Soit  $a > 0$  et  $b > 0$ . Montrer que :  $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b} \Rightarrow a = b$

Raisonnons par l'absurde : Supposons que  $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$  et  $a \neq b$



Comme  $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$  donc  $a + a^2 = b + b^2$ , d'où  $(a-b)(a+b+1) = 0$ , par suite  $(a+b+1) = 0$  car

$a-b \neq 0$ , alors  $a+b = -1$  ce qui est contradictoire avec le fait que  $a > 0$  et  $b > 0$ . Donc si  $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$  alors  $a = b$

2) Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

### 5. Raisonnement par contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition du type " $\forall x \in E; P(x)$ " est fausse il suffit de trouver au moins un élément  $\alpha$  de  $E$  tel  $P(\alpha)$  soit fausse. Un tel raisonnement est appelé **raisonnement par contre-exemple**

Exemple :

1) Montrer que :  $(\forall x \in [0,1]) : x^2 \geq x$  est fausse

En effet la négation de la proposition  $P : (\forall x \in [0,1]) : x^2 \geq x$  est  $\bar{P} : (\exists x \in [0,1]) : x^2 < x$

En posant  $x = \frac{1}{3}$  on a :  $x^2 = \frac{1}{9}$  et comme  $\frac{1}{9} < \frac{1}{3}$  alors  $(\exists x = \frac{1}{3} \in [0,1]) : x^2 < x$  donc la proposition  $\bar{P}$  est vraie d'où la proposition  $P$  est fausse

2) Montrer que :  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) ; x^2 + y^2 \geq x + y$

### 6. Raisonnement par récurrence

#### Principe de récurrence

Soit  $P(n), n \in \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  une fonction propositionnelle, où  $n_0$  est un entier naturel fixé. Pour démontrer que, pour tout entier naturel  $n \geq n_0$  on a  $P(n)$ , on procède comme suit :

- Initialisation : On vérifie que  $P(n_0)$  est vraie
- Hérédité : Soit  $n \geq n_0$ , on montre que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
- Conclusion :  $(\forall n \geq n_0) ; P(n)$  est vraie

#### Principe de récurrence (version pratique)

Montrer que :  $(\forall n \geq n_0) ; P(n)$ . On suit les étapes suivantes :

- Initialisation : On vérifie que  $P(n_0)$  est vraie
- Hérédité : Soit  $n \geq n_0$ , supposons que  $P(n)$  est vraie  
Et montrons que  $P(n+1)$  est vraie
- Conclusion :  $(\forall n \geq n_0) ; P(n)$  est vraie

Exemples :

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; n^3 + 2n$  est divisible par 3

En effet : On pose  $P(n) : 3 \mid n^3 + 2n, n \in \mathbb{N}$ . Raisonnons par récurrence :

- Initialisation : Pour  $n = 0$ , on a  $3 \mid 0^3 + 2 \times 0$ . Donc  $P(0)$  est vraie
- Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $n^3 + 2n$  est divisible par 3 ; c-à-d  $(\exists k \in \mathbb{N}) : n^3 + 2n = 3k$   
Et montrons que  $P(n+1)$  est vraie c-à-d  $(\exists k' \in \mathbb{N}) : (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k'$





<https://www.dimamath.com>

$$\begin{aligned} \text{On a } (n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1) \\ &= 3k + 3(n^2 + n + 1) = 3(k + n^2 + n + 1) = 3k' \text{ où } k' = k + n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie

- Conclusion :  $(\forall n \in \mathbb{N}); n^3 + 2n$  est divisible par 3

2) Montrer, par récurrence, que :  $(\forall n \geq 5); 2^n \geq 6n$

### 7. Raisonnement par analyse – synthèse

Le raisonnement par **analyse-synthèse** pour déterminer les solutions d'un problème lorsque la rédaction est délicate :

- Dans la première partie **analyse**, on détermine toutes les solutions éventuelles de ce problème
- La seconde partie **synthèse**, On élimine les solutions de l'analyse qui ne vérifient pas toutes les conditions

#### Exemple :

Déterminer toutes les applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :  $(\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2); f(n+m) = f(n) + f(m)$

<https://www.dimamath.com>



**MATHÉMATIQUES  
POUR TOUS**