I – Limites d'une fonction

1 – Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions et L et L' deux réels. Alors :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L>0$ ou $+\infty$		$L<0$ ou $-\infty$		$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$		$L<0$ ou $-\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L'\neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Remarque

Le nombre a peut être un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, ou a^+, ou a^-

2 – Les formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	$+\infty-\infty$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\pm\infty\times 0$	$\frac{0}{0}$

Remarque

Une forme indéterminée ne veut pas dire que la fonction n'a pas de limite, mais que la technique utilisée pour calculer cette limite n'est pas la bonne en général

3 – Quelques techniques de calcul des limites

Méthodes de calcul des limites

Les techniques utilisées pour calculer une limite peuvent se résumer comme suit :

- Lorsqu'un remplacement simple donne la limite
- Lorsqu'on a une forme indéterminée
  - La factorisation
  - La multiplication par l'expression conjuguée
  - L'encadrement
  - Expression conjuguée + Factorisation
  - Utilisation des limites admises

Proposition1

Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0)$ une fonction polynôme. Alors :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Proposition2

Soit $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$ (où $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$) une fonction rationnelle. Alors

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Proposition3

On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Théorème de comparaison

Soit I un intervalle et a une borne de I.

- ✯ $\left.\begin{array}{l}(\forall x\in I);\ f(x)<g(x)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$
- ✯ $\left.\begin{array}{l}(\forall x\in I);\ f(x)>g(x)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$
- ✯ $\left.\begin{array}{l}(\forall x\in I);\ h(x)<f(x)<g(x)\\ \lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\end{array}\right\}$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

(Théorème des gendarmes)

Exemples

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+5}{5x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{5x^2}=\frac{3}{5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x^2-2x+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x^2}=0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-7x+2}{3x+9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{3x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2-5x+2=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+9}-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9}{\sqrt{4x^2+9}+2x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+7}+3x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{\sqrt{9x^2+7}-3x}=0$;
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{1}{8}$;
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{x+5}=-\frac{1}{7}$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-1\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+1}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+1\right)=+\infty$

II – Continuité d'une fonction en un point

1 – Continuité d'une fonction en un point

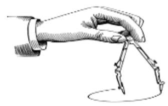
Définition

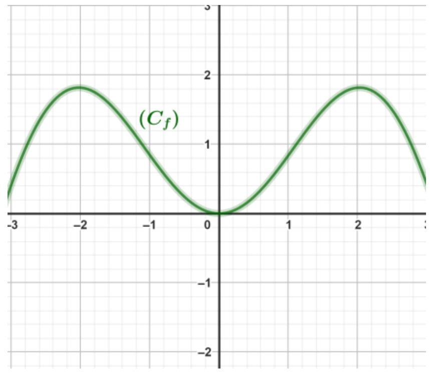
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a-\alpha,a+\alpha[$ *où* $\alpha>0$.

Dire que la fonction f est continue en a signifie que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

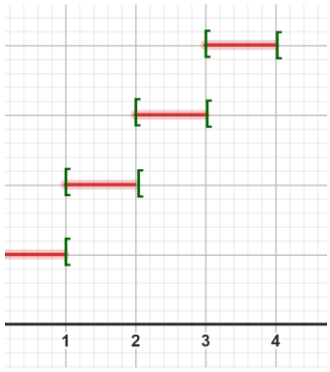
Remarques

- Une fonction est continue en a si sa courbe n'est pas brisée au voisinage du point d'abscisse a
- Lorsqu'une fonction n'est pas continue en a, on dit qu'elle est discontinue en a
- Pour étudier la continuité d'une fonction en a on doit s'assurer que $a\in D_f$





La fonction est continue en chaque point de l'intervalle $[-3,3]$



La fonction n'est pas continue en 1, 2, 3 et 4

Exemples

Etudier la continuité de la fonction f en a dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1},\quad a=0$
2. $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{x},\quad a=\dfrac{\pi}{6}$
3. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x}{2x}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases},\quad a=0$

2 – Continuité à droite – continuité à gauche

Définition1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,a+\alpha[$ où $\alpha>0$.

Dire que la fonction f est continue à droite en a, si et seulement si, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

Définition2

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a-\alpha,a]$ où $\alpha>0$.

Dire que la fonction f est continue à gauche en a, si et seulement si, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

Théorème

Une fonction est continue en un point a si, et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a

Remarque

Pour montrer la continuité de certaines fonctions on est obligé de montrer qu'elles sont continues à droite et à gauche en des points particuliers.

Exemples

- Montrer que la fonction f est continue à droite en 0 et la fonction g est continue à gauche en 1 dans les cas suivants :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\tan(2x)}{\sin x}\ ;\ x>0 \\ f(0)=2 \end{cases}\ ;\ \begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{|1-x|}\ ;\ si\ x<1 \\ g(1)=1 \end{cases}$$

Réponses

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan(2x)}{\sin x}=\lim_{x\to0^+} 2\cancel{x}\times\frac{\tan(2x)}{2x}\times\frac{1}{\cancel{x}}\times\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=2\times1\times1=2$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(2)$, par conséquent la fonction f est continue à droite en 0.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{1-x} = "\dfrac{0}{0}"\ (FI)$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{-\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1^-} -(x-2) = 1$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$. D'où la fonction g est continue à gauche en 1

- Etudier la continuité de la fonction f en 1 dans le cas suivant : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\tan x}{x} & ; x > 1 \\ f(0) = 1 & , a = 0 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} + \dfrac{3}{2} ; x < 0 & \end{cases}$

<u>Réponse</u>
Un exemple de fonction où on est contraint d'étudier la continuité à droite et à gauche d'un point.

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x}{x} = 1 = f(0)$ Donc la fonction f est continue à droite en 0

Et on a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} + \dfrac{3}{2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-x}+1\right)} + \dfrac{3}{2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1} + \dfrac{3}{2} = 1 = f(0)$

Donc la fonction f est continue à gauche en 0

Conclusion : Puisque la fonction f est continue à droite et à gauche de 0, alors elle est continue en 0

- Déterminer les réels a et b pour que la fonction f soit continue en 2 :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{30\left(\sqrt{x+7}-3\right)} ; x > 2 \\ f(2) = b \\ f(x) = \dfrac{\sin(x-a)}{x-2} ; x < 2 \end{cases}$$

III – Continuité d'une fonction sur un intervalle

1 – Continuité sur un intervalle

<u>Définitions</u>

Soit a et b deux réels quelconques.

- f **est continue sur** $]a;b[\Leftrightarrow f$ **est continue en chaque élément de** $]a;b[$
- f **est continue sur** $[a;b[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a;b[\\ f \text{ est continue à droite en } a \end{cases}$
- f est continue sur $]a;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a;b[\\ f \text{ est continue à gauche en } b \end{cases}$
- f est continue sur $[a;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a;b[\\ f \text{ est continue à droite en } a \\ f \text{ est continue à gauche en } b \end{cases}$
- f est continue sur $]a;+\infty[\Leftrightarrow f$ est continue en tout élément de $]a;+\infty[$
- f est continue sur $[a;+\infty[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a;+\infty[\\ f \text{ est continue à droite en } a \end{cases}$
- f est continue sur $]-\infty;b[\Leftrightarrow f$ est continue en tout élément de $]-\infty;b[$

- f est continue sur $]-\infty;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]-\infty;b[\\ f \text{ est continue à gauche en } b \end{cases}$
- f est continue sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ est continue en tout élément de $\mathbb{R}$

2 – Continuité des fonctions usuelles

Propriété (admise)

- Toute fonction polynôme est continue sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^+$
- Les fonction cosinus et sinus sont continues sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemples

- La fonction f définie sur $I=[0,+\infty[$ par : $f(x)=x^2-4x+7+\dfrac{2}{x+1}-5\sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle I, car la fonction f est la somme des fonctions $x \mapsto x^2-4x+7$; $x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$ et $x \mapsto -5\sqrt{x}$ qui sont continues sur I.
- La fonction g définie sur $I=[0,+\infty[$ par : $g(x)=(3x^4-5x+8)\sqrt{x}$ est continue sur I, car elle est le produit des fonctions $x \mapsto 3x^4-5x+8$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ qui sont continues sur l'intervalle I.
- La fonction h définie sur $I=[1,+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{3-x}{(2x-1)(x+5)}$ est continue sur l'intervalle I, car la fonction h est le quotient des fonctions $x \mapsto 3-x$ *et* $x \mapsto (2x-1)(x+5)$ qui sont continues sur I.

3 – Opérations sur les fonctions continues

Proposition1

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a \in I$ et k un réel quelconque.

- ☆ Si f et g sont continues en a , alors les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $k \times f$ sont continues en a
- ☆ Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a

Proposition2

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et k un réel quelconque.

- ☆ Si f et g sont continues sur l'intervalle I , alors les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $k \times f$ sont continues sur I
- ☆ Si $\begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont continues sur l'intervalle } I \\ \text{et } (\forall x \in I);\ g(x) \neq 0 \end{cases}$, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I

Exemple

Montrer que les fonction f et g sont continues respectivement sur $\mathbb{R}$ *et* $[1;+\infty[$ telle que :

$$f(x)=x^2+3x-1+\frac{1}{x^2+2}-\cos x \ ;\ g(x)=\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x}}.$$

En effet : on a $D_f=\mathbb{R}$ et comme les fonctions $x \mapsto x^2+3x-1$ *et* $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ alors la fonction f est aussi continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de ses deux fonctions.

Et on a $D_g=[1,+\infty[$ et comme les fonctions $x \mapsto \sqrt{x-1}+2$ *et* $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur $[1;+\infty[$ et comme $(\forall x \in [1;+\infty[);\ \sqrt{x} \neq 0$;alors la fonction g est continue sur $[1;+\infty[$ comme quotient de ses deux fonctions continues

4 – Continuité de la composée de deux fonctions continues

Proposition1

1. Si $\begin{cases} f \text{ définie et continue en } a \\ g \text{ définie et continue en } b = f(a) \end{cases}$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a

2. Si $\begin{cases} f \text{ définie et continue sur un intervalle } I \\ g \text{ définie et continue sur un intervalle } J \\ f(I) \subset J \end{cases}$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I

Proposition3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ et $L \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a-r; a+r[$ et soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert J centré en L tels que : ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, g est continue en L et $f(I) \subset J$), alors: $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = L$

5 – Image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition

Soit f une fonction définie sur D_f, $[a;b] \subset D_f$ et I un intervalle de D_f .

- Si f est continue sur $[a;b]$, alors $f([a;b])$ est un segment. On note $f([a,b]) = [m, M]$
- Si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle

Intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); f(b)\right]$	$\left[f(b); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); f(b)\right]$	$\left[f(b); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

Remarque

Souvent pour déterminer l'image d'un intervalle par une fonction on est obligé d'étudier les variations de cette fonction sur cet intervalle, et on a l'un des cas cités dans le tableau précédent.

IV – Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

$\begin{cases} f \text{ définie et continue sur } [a;b] \\ k \text{ un réel compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases}$, alors il existe un réel c de $[a,b]$ tel que : $f(c) = k$

Théorème des valeurs intermédiaires et résolution des équationS

$\begin{cases} f \text{ définie et continue sur } [a;b] \\ k \text{ un réel compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases}$, alors l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

Interprétation graphique du TVI :

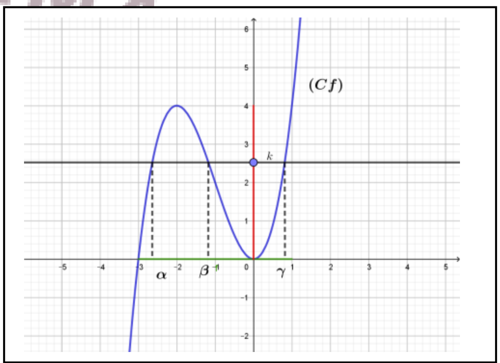
Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a;b]$ et soit k un réel compris entre $f(a)$ *et* $f(b)$ alors La partie de la courbe représentative de f sur $[a;b]$ coupe la droite d'équation $y=k$ au moins en un point

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3+3x$

1/ Montrer que l'équation $f(x)=\frac{5}{2}$ admet au moins une Solution sur le segment $[-3;1]$

2/ En déduire que la courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y=\frac{5}{2}$ au moins en un point d'abscisse appartenant au segment $[-3;1]$



Corollaire1

Si $\begin{cases} f \text{ définie et continue sur } [a,b] \\ f(a)\times f(b)<0 \end{cases}$, alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$

Remarque

Si une fonction est continue sur un intervalle et les images de ses extrémités sont de signes opposés, alors sa courbe représentative coupe l'axe des abscisses au moins en un point dont l'abscisse appartient à cet intervalle

Corollaire2

Si $\begin{cases} f \text{ définie et continue sur } [a,b] \\ f \text{ strictement monotone sur } [a,b] \\ f(a)\times f(b)<0 \end{cases}$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]a,b[$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x+1$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1;0[$.

En effet : f est continue et dérivable sur $[-1;0]$ *et* $f'(x)=3x^2+1$. Donc f est strictement croissante sur $[-1;0]$; en plus $f(-1)=-1$ et $f(0)=1$ donc $f(-1)\times f(0)<0$. D'où, d'après le corollaire du TVI , l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-1;0[$

Corollaire 3

Soit f et g deux fonctions définies sur $[a;b]$ et h la fonction définie sur $[a;b]$ par : $h(x)=f(x)-g(x)$.

Si $\begin{cases} f \text{ et } g \text{ continues } [a,b] \\ h(a)\times h(b)<0 \end{cases}$, alors l'équation $f(x)=g(x)$ admet au moins une solution dans $[a;b]$

Corollaire 4

Soit f une fonction définie sur l'intervalle de la forme $[a;+\infty[$ et k un réel.

Si $\begin{cases} f \text{ définie et continue sur } [a,+\infty[\\ k\in f([a,+\infty[) \end{cases}$, alors l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans $[a;+\infty[$.

Si en plus f est strictement monotone sur $[a;+\infty[$, alors l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[a;+\infty[$

Exemples

1/ $f(x)=\sin x$ et $g(x)=2x-1$. Montrer que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

2/ $f(x)=x^3+2x-1$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

Méthode d'encadrement par dichotomie des solutions d'une équation de la forme $f(x)=0$.

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur un segment $[a;b]$ $(a<b)$ telle que $f(a)\times f(b)<0$. Donc d'après le corollaire du TVI il existe un unique réel $c\in]a;b[$ tel que $f(c)=0$.

On pose $m=\dfrac{a+b}{2}$, et on calcule $f(m)$. On a deux cas possibles :

- $f(a)\times f(m)<0$ et donc $c\in]a;m[$
- $f(m)\times f(b)<0$ donc $c\in]m;b[$

On réitère ce procédé jusqu'à ce qu'on arrive à l'encadrement demandé. Ce procédé s'intitule la dichotomie. Après n étapes on a un encadrement de c d'amplitude $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Exemple

Déterminer un encadrement à $6,25\times10^{-2}$ près de $\sqrt{2}$

Remarquons que $\sqrt{2}$ est la solution positive de l'équation $x^2-2=0$.

On considère la fonction f définie sur $[1;2]$ par : $f(x)=x^2-2$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;2]$ et on a : $f(1)=-1$ *et* $f(2)=2$ donc $f(1)\times f(2)<0$ par conséquent l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $c=\sqrt{2}$ dans $]1;2[$. On a $f(1)<0$ *et* $f(2)>0$

a	b	m	$f(m)$	conclusion
1	2	1,5	$0,25>0$	$1<c<1,5$
1	1,5	1,25	$-0,4375<0$	$1,25<c<1,5$
1,25	1,5	1,375	$-0,109<0$	$1,375<c<1,5$
1,375	1,5	1,4375	$0,066>0$	$1,375<c<1,4375$

Enfin on a $1,4375-1,375=0,0625=6,25\times10^{-2}$. Donc l'encadrement de c à $6,25\times10^{-2}$ est

$1,375<c<1,4375$

V – Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

Proposition1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que .

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } I \\ \bullet\ f \text{ strictement monotone sur } I \\ \bullet\ J = f(I) \end{array}\right\} \text{alors } f \text{ admet une fonction réciproque } f^{-1} \text{ définie sur l'intervalle } J$$

Proposition2

Soit $f(x) = x^3$ et $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I telle que $J = f(I)$. Alors :

- La fonction réciproque f^{-1} est continue et de même monotonie que f sur l'intervalle $J = f(I)$
- $(\forall x \in J)(\forall y \in I),\ y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$
- $(\forall x \in I),\ f^{-1} \circ f(x) = x$
- $(\forall x \in J),\ f \circ f^{-1}(x) = x$
- La courbe représentative de f^{-1} et la courbe représentative de f sont symétriques par rapport à la première bissectrice c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé

Exemple

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]2,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

1/ Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .

2/ a/ Calculer $f(3)$ et en déduire $f^{-1}(1)$

b/ Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3/ Dresser le tableau de variation de la fonction f^{-1}

4/ Construire dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ les courbes représentatives de f et de f^{-1}

Corrigé

1/on a $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ et $I =]2;+\infty[$

Puisque les fonctions $x \mapsto x-2$ et $x \mapsto \sqrt{x-2}$ sont continues sur l'intervalle I et $(\forall x \in I),\ \sqrt{x-2} \neq 0$; alors la fonction f est continue sur I .

De même la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(\forall x \in I);\ f'(x) = -\dfrac{1}{2(x-2)\sqrt{x-2}}$

Donc $(\forall x \in I);\ f'(x) < 0$, par suite la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I.

Alors la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$ donc $J = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\right[=]0;+\infty[$.

2/ a/ $f(3) = 1$ donc $f^{-1}(1) = 3$

$b/$ Soit $x \in J$ et $y \in I$;

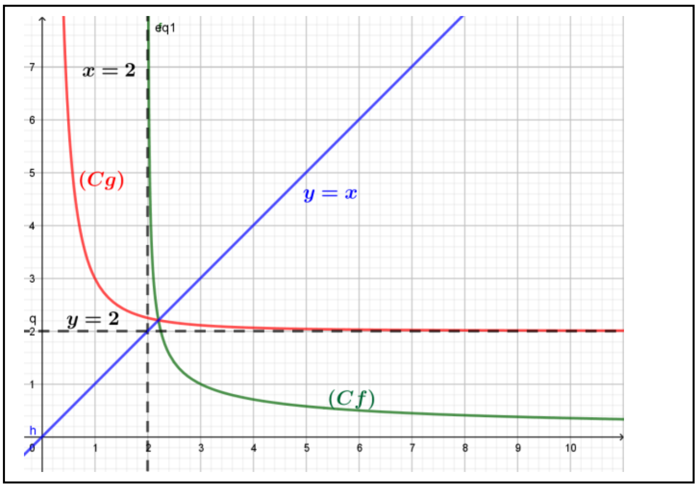
on a $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y-2}} = x$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x^2+1}{x^2}$$

Donc $(\forall x \in J)$; $f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$



VI – Fonction racine n^{eme}

Théorème et définition

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

La fonction $f : x \mapsto x^n$ admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Le nombre $\sqrt[n]{x}$ est appelé la racine $n^{ème}$ ou la racine d'ordre n du réel positif x.

Propriétés

Soit n et m deux entiers naturels non nuls. Alors :

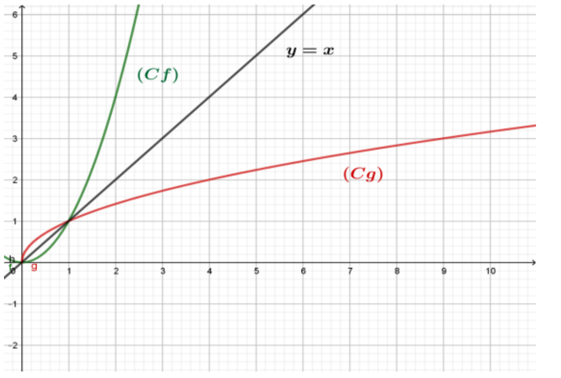
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)$; $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)$; $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)$; $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{+*})$; $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ et $\sqrt[n]{\dfrac{1}{y}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{y}}$
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$ et $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$

Proposition

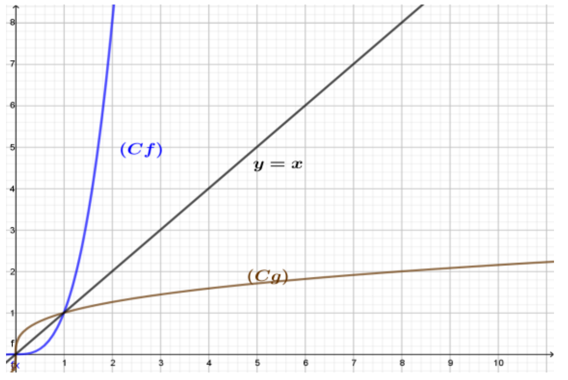
Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto x^n$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Courbes des fonctions racine carrée et racine cubique



$f(x) = x^2$ et $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = x^3$ et $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Puissance rationnelle d'un réel strictement positif

Définition

Soit $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0;+\infty[$ et $r = \frac{p}{q}$.

La puissance rationnelle du nombre réel x d'exposant r est le nombre réel $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

En particulier : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^+);\ \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Propriétés

$(\forall r \in \mathbb{Q}^*)(\forall r' \in \mathbb{Q}^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall m \in \mathbb{Z}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})(\forall y \in \mathbb{R}^{+*})$, on a :

- $x^r > 0$
- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$; $(x^r)^{r'} = x^{r\times r'}$; $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$ et $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$
- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$
- $x^r \times y^r = (xy)^r$; $\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$

La persévérance mène au sommet