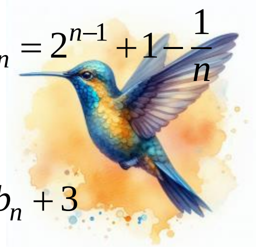
Exercices : Rappels sur les suites numériques

Exercice 1

Calculer les cinq premiers termes des suites suivantes :

a) (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$; b) $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ v_n = 2^{n-1} + 1 - \dfrac{1}{n}$



c) (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{1+a_n} \end{cases}$; d) (b_n) définie par : $\begin{cases} b_0 = 0,\ b_1 = 2 \\ b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n + 3 \end{cases}$

Exercice 2

On considère la suite arithmétique (u_n).

1) Si $u_0 = -2$ *et* $r = 2$, déterminer u_n en fonction de n et en déduire la valeur de u_{17}

2) Si $u_5 = 7$ *et* $r = \dfrac{1}{2}$, déterminer u_n en fonction de n et en déduire la valeur de u_{21}

3) Si $u_7 = 12$ *et* $u_{24} = 46$, déterminer la raison r puis u_n en fonction de n et en déduire la valeur de u_{100} et u_0

Exercice 3

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n^2}$ et soit (v_n) la suite numérique telle que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = u_n^2$

1) Calculer u_1, v_0 et v_1

2) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on déterminera la raison

3) Exprimer v_n en fonction de n

4) Déduire une expression de u_n en fonction de n

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = 3 + 5 + 7 + \ldots + 2023$

$S_2 = \dfrac{1}{3} + 1 + \dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{3} + \ldots + 13$

$S_3 = -7 - 4 - 1 + 2 + 5 + \ldots + 23$

$S_4 = 5 + 1 - 3 - 7 - \ldots - 75$

Exercice 5

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

a) Si $u_0 = -1$ et $q = 2$, calculer u_n en fonction de n puis en déduire u_{10}

b) Si $u_3 = 2$ et $q = 3$, calculer u_5

c) Si $u_1 = 7$ *et* $u_3 = 112$, calculer q puis u_5

Exercice 6

Soit (v_n) une suite géométrique telle que son premier terme $v_0 = -3$ et sa raison $q = 2$.

1) Calculer v_1 et v_2

2) Déterminer v_n en fonction de n

Exercices : Rappels sur les suites numériques

3) Calculer les sommes $S_1 = v_0 + v_1 + \ldots + v_{10}$ *et* $S_2 = v_{11} + v_{12} + \ldots + v_{20}$

Exercice 7

Soit (w_n) une suite géométrique à termes positifs telle que $w_4 = 0,84$ *et* $w_6 = 5,25$.

1) Calculer la raison q de cette suite

2) Calculer w_0

3) Exprimer w_n en fonction de n

4) Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} w_k$ pour tout entier $n \geq 2$

5) Donner le sens de variation de la suite (w_n)

Exercice 8

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

1) Si $u_0 = 4$ et $q = 2$, calculer la somme $S = \sum_{k=3}^{18} u_k$

2) Si $u_0 = 2$ et $q = 3$, calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{21} u_k$

Exercice 9

Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$S_3 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \ldots + 6144$

$S_4 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots - \left(\frac{1}{3}\right)^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^8$

$S_5 = 27 + 81 + 243 + \ldots + 59049$

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1) a) Calculer u_1 et u_2

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ? justifier la réponse

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3) Soit (v_n) la suite numérique définie , pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, en fonction de n.

Exercices : Rappels sur les suites numériques

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 11

On considère la suite (u_n) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1/ a/ Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 6$

b/ Etudier le sens de variation de (u_n)

c/ En déduire la convergence de (u_n)

2/ Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = u_n - 6$

a/ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b/ Déterminer v_n *puis* u_n en fonction de n

c/ Calculer en fonction de n les sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ *et* $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Exercice 12

On considère la suite numérique $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\dfrac{1}{4} \leq a_n \leq 1$

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $b_n = \dfrac{1}{n}a_n$

a) Montrer que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique

b) Exprimer b_n en fonction de n

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $(n+1)^2 = n^2\left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n tel que $n \geq 4$, on a : $n^2 \leq 2^n$