



**EXERCICE1** : (6.5 points)

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction numérique  $f_n$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in ]0, +\infty[ ; f_n(x) = x - x^n \ln x$$

Et on note  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

0.25 1-a) Montrer que  $f_n$  est continue à droite en 0

0.75 b) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 c) Montrer que  $f_n$  est dérivable à droite en 0 et que son nombre dérivé à droite en 0 est égal à 1

0.5 d) Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ ; f_n'(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x$$

0.5 e) Montrer que  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0;1]$  et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :  $\forall x \in [0, +\infty[ ; f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

0.25 b) En déduire la position relative des deux courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$

0.5 3-a) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , il existe un unique réel  $\alpha_n \in ]1;2[$  tel que :  $f_n(\alpha_n) = 0$   
(On prendra  $\ln 2 = 0,7$ )

0.25 b) Vérifier que  $(\forall n \geq 2) \quad \alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = 1$

0.25 c) En déduire que pour tout  $n \geq 2$ ,  $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$

0.5 d) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  ainsi définie est strictement décroissante.

0.25 e) En déduire que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  est convergente.

4- On pose :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

0.25 a) Montrer que :  $1 \leq \ell \leq 2$

0.5 b) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,  $n - 1 = -\frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

0.25 c) On suppose que  $\ell > 1$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$  en fonction de  $\ell$

0.5 d) En déduire la valeur de la limite  $\ell$

**EXERCICE2** : (3.5 points)

0.25 1-a) Calculer l'intégrale :  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

0.5 b) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k^2}$

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente puis déterminer sa limite.

0.25 2- Montrer que :  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \leq 1$

0.5 3-a) Montrer que :  $(\forall x \in [0,1]) ; 0 \leq e^x - 1 \leq e.x$

0.25 b) En déduire que :  $(\forall x \in [0,1]) ; 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2$

4- Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $w_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left( e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1 \right)$

0.25 a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{n}{n^2 + k^2} \right)^2$

0.25 b) Montrer que la fonction :  $x \mapsto (1+x^2)^{-2}$  est strictement décroissante sur  $[0,1]$

0.25 c) En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tout entier  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on a :

$$\frac{1}{n} \left( 1 + \left( \frac{k}{n} \right)^2 \right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2} dx$$

0.5 5-a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$

0.5 b) En déduire que la suite  $(w_n)_{n \geq 1}$  est convergente et déterminer sa limite.

**EXERCICE3** : (3.5 points)

Soit  $m \in \mathbb{C}^*$

**Partie I** : On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$

$$(E) : z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$$

0.25 1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est  $\Delta = (im)^2$

0.5 b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E)

2- Soient  $z_1$  et  $z_2$  les deux solutions de (E)

0.5 Mettre sous la forme exponentielle  $z_1 z_2$  dans le cas où  $m = re^{i\theta}$  ( $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ )

**Partie II :** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On pose  $z_1 = m$  et  $z_2 = m(1+i)$

Soit  $M_1$  le point d'affixe  $z_1$ ,  $M_2$  le point d'affixe  $z_2$  et  $M_3(z_3)$  l'image du point  $O$  par

la rotation de centre  $M_2$  et d'angle  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  et  $M_4(z_4)$  l'image du point  $M_1$  par

l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$  ( $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ )

0.75 1- Calculer  $z_3$  en fonction de  $m$  et  $z_4$  en fonction de  $m$  et  $k$

0.75 2- Donner la forme algébrique de  $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$

0.75 3- En déduire que les points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  sont cocycliques si et seulement si  $k = -2$

**EXERCICE4 :** (3.5 points)

On munit l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes de la loi de composition interne  $*$  définie par :  $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4 ; (x + iy) * (x' + iy') = (xy' + y^5 x') + iyy'$

**Partie I :**

0.25 1- a) Vérifier que :  $1 * 2i = 2$

0.25 b) Montrer que la loi de composition interne  $*$  n'est pas commutative.

0.5 2- Montrer que la loi  $*$  est associative.

0.25 3- a) Vérifier que :  $1 * (1 + 2i) = 2$

0.25 b) En déduire que  $(\mathbb{C}, *)$  n'est pas un groupe.

4- Soit  $E$  le sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  défini par  $E = \{x + yi / x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^*\}$

0.25 a) Montrer que  $E$  est stable dans  $(\mathbb{C}, *)$

0.5 b) Montrer que  $(E, *)$  est un groupe non commutatif.

**Partie II :**

On considère les sous-ensembles de  $E$  définies par :  $F = \{yi / y \in \mathbb{R}^*\}$  et

$G = \{x + i / x \in \mathbb{R}\}$

0.5 1- Montrer que  $F$  est un sous-groupe de  $(E, *)$

2- On considère l'application  $\varphi$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = x + i$

0.25 a) Montrer que :  $\varphi(\mathbb{R}) = G$

0.25 b) Montrer que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(\mathbb{C}, *)$

0.25 c) En déduire que  $(G, *)$  est un groupe commutatif.

**EXERCICE 5 :** (3 points)

- 0.5 1- En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier  $u \in \{1, 2, \dots, 22\}$  tel que :  
 $10u \equiv 1 [23]$
- 2- Soient  $m$  un entier naturel et  $q$  et  $r$ , respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de  $m$  par 10
- 0.5 a) Montrer que :  $m \equiv 10(q + ur) [23]$
- 0.75 b) Montrer que :  $23 \text{ divise } m \Leftrightarrow 23 \text{ divise } (q + ur)$
- 3- On considère dans  $\mathbb{N}$  le système  $(S) : \begin{cases} x \equiv 1 [23] \\ x \equiv 2 [10] \end{cases}$
- 0.75 a) Montrer que si  $x$  est une solution du système  $(S)$  alors il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que  
 $x = 10q + 2$  et  $23 \text{ divise } (q + 7)$
- 0.5 b) Résoudre dans  $\mathbb{N}$  le système  $(S)$

**FIN**