الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2024
- الموضوع -

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSSS | RS 22F

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	4 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Etude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques	11 points

- ✓ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(1,1,0)$ et $\Omega(-1,1,-2)$ et le plan (P) d'équation $x+z-1=0$

0.5 1) a) Vérifier que A est un point du plan (P) et donner un vecteur normal de (P).

0.5 b) Montrer que la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P).

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$

0.5 a) Montrer que (S) est une sphère de centre Ω et déterminer son rayon.

0.5 b) Montrer que (P) coupe (S) suivant un cercle de centre A puis déterminer son rayon.

3) Soit (Q_m) un plan d'équation $x+y+mz-2=0$, où m est un nombre réel.

0.25 a) Vérifier que A est un point du plan (Q_m) , pour tout m de $\mathbb{R}$

0.5 b) Déterminer la valeur du réel m pour que (Q_m) soit perpendiculaire au plan (P)

0.25 c) Existe-t-il un plan (Q_m) qui coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre A ? Justifier.

Exercice 2 (4points)

I) On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-4z+9=0$

0.25 1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=\left(2i\sqrt{5}\right)^2$

0.5 2) Résoudre l'équation (E)

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2+i\sqrt{5}$, $b=2-i\sqrt{5}$ et $c=2-\sqrt{5}$.

0.25 1) a) Vérifier que $|a|=3$

0.25 b) Montrer que le triangle OAB est isocèle.

0.5 2) a) Vérifier que $\dfrac{a-c}{b-c}=i$

0.5 b) Déduire la nature du triangle ABC

0.5 3) a) Déterminer l'affixe du point D image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$

0.5 b) Montrer que $ADBC$ est un carré.

4) On pose $x_n=\left(\dfrac{a}{3}\right)^n$ et $y_n=\dfrac{1}{1-x_n}$, avec n un entier naturel non nul.

0.25 a) Vérifier que $x_n\overline{x_n}=1$

0.5 b) Montrer que $y_n+\overline{y_n}=1$ puis déduire la partie réelle de y_n

Exercice 3 (2points) :

Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

0.25 1) Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à 336

0.5 2) Calculer la probabilité de l'évènement A : « Tirer trois boules blanches ».

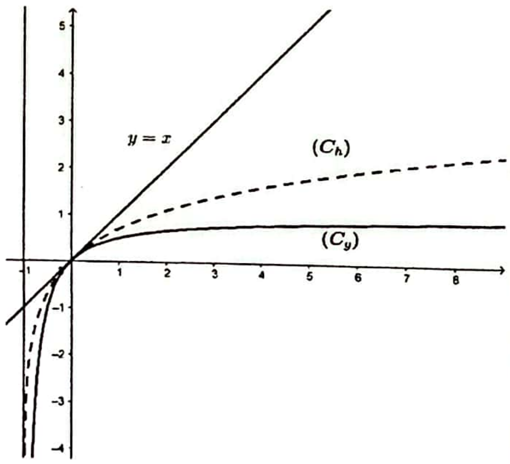
0.75 3) Montrer que la probabilité de l'évènement B : «Tirer trois boules de même couleur » est $p(B)=\dfrac{5}{56}$

0.5 4) Calculer la probabilité de l'évènement C : « Obtenir au moins deux couleurs différentes ».

Problème (11points) :

Partie I :

La figure ci-contre représente les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ et $h : x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et la droite d'équation $y = x$, dans un même repère orthonormé.



0.5 1) a) A partir de cette figure, justifier que :

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x \text{ , pour tout } x \text{ de }]-1,+\infty[$$

0.25 b) En déduire que $(1+x)\ln(1+x)-x \ge 0$, pour tout x de $]-1,+\infty[$

0.5 c) Prouver que $e^x-(1+e^x)\ln(1+e^x) \le 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 a) Montrer par récurrence que $0 < u_n \le 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question 1) a))

0.25 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

0.75 d) Déterminer la limite de (u_n).

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5	1) a) Calculer $f(0)$ et vérifier que $f(x)>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$
0.5	b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
0.5	c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
0.5	2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}: f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}-e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$
0.5	b) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}: f'(x)=\dfrac{e^{x}-\left(1+e^{x}\right)\ln\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}\left(1+e^{x}\right)}$
0.5	c) Déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (On peut utiliser la question 1-c) de la partie I)
0.5	3) a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0
0.25	b) Vérifier que la tangente (T) passe par le point $A\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$
0.75	c) Construire (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prend $\ln 2\approx 0,7$)
0.5	4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $f^{-1}(x)$)
0.5	b) Vérifier que f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)$
	5) Soit λ un réel strictement positif.
0.25	a) Vérifier que $\dfrac{1}{1+e^{x}}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, pour tout x de $\mathbb{R}$
0.5	b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\lambda}\frac{1}{1+e^{x}}dx=\ln(2)-\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)$
0.5	c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\lambda}f(x)dx=\ln(2)-f(\lambda)+\int_0^{\lambda}\frac{1}{1+e^{x}}dx$ (Remarquer que $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}-f'(x)$)
0.5	d) Déduire en fonction de λ, l'aire A_λ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$
0.5	e) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$