Table des matières

I – Raisonnement par récurrence

1 – Intérêt du raisonnement par récurrence

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$

On s'intéresse au signe des termes de cette suite.
Comme $u_0 = 2$, alors $u_0 > 0$

De même $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, alors $u_1 > 0$.

On peut poursuivre cette démarche pour vérifier que le terme d'un certain rang est positif. Mais est-ce qu'on peut dire que tous les termes de cette suite sont positifs?. En réalité on n'a pas effectué une démonstration pour répondre à la question parce qu'on manque de raisonnement adéquat à ce type de questions.
Le raisonnement par récurrence vient pour combler ce manque

2 – Principe du raisonnement par récurrence

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété telle que n est un entier naturel supérieur ou égal à n_0 (un entier naturel fixé).
Pour démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$ on a $P(n)$, on procède comme suit :

- Initialisation : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie
- Hérédité : Soit $n \geq n_0$, on montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
- Conclusion : $(\forall n \geq n_0)$; $P(n)$ est vraie

Pour expliquer le raisonnement de récurrence on fait l'analogie avec un nombre infini de dominos disposés comme sur la figure de telle façon que si un domino tombe celui qui le suit tombe aussi.
Pour être sûr que tous les dominos vont tomber, on a besoin de deux conditions :

- Faire tomber le premier domino (**l'initialisation**)
- Lorsqu'un domino tombe, il fait tomber machinalement Celui qui le suit (**l'hérédité**)

3 – Application aux suites numériques

3 - 1 - Raisonnement par récurrence et les suites

Les suites numériques constituent le domaine de prédilection pour l'utilisation du raisonnement par récurrence.

Principe de récurrence (version pratique)

Pour montrer par récurrence que : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$. On suit les étapes suivantes :

- **Initialisation** : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie
- **Hérédité** : Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$
  Montrons que $P(n+1)$ est vraie
- **Conclusion** : Puisque la propriété est initialisable pour n_0 et est héréditaire à partir de n_0, alors $(\forall n \geq n_0)$; $P(n)$ est vraie.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Réponse :

Raisonnons par récurrence. Posons $P(n) : "u_n > 0"$; $n \in \mathbb{N}$

- **Initialisation** :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$, donc $u_0 > 0$. Alors $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

Supposons que la propriété $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$, c-à-d $u_n > 0$ (HR)

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c-à-d : $u_{n+1} > 0$

Démonstration :

D'après (HR) on a : $u_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} > \frac{1}{3} \Rightarrow u_{n+1} > \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** :

La propriété est initialisable pour $n = 0$ et est héréditaire à partir de 0. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

3 - 2 - Donner l'expression du terme général d'une suite

Exemple 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 3 \; et \; u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2^{n+1} + 1$

Réponses

1) On a : $u_0 = 3$; $u_1 = 2\times u_0 - 1 = 5$; $u_2 = 2\times u_1 - 1 = 9$; $u_3 = 2\times u_2 - 1 = 17$

2) Raisonnons par récurrence. Posons $P(n) : "u_n = 2^{n+1} + 1", n \in \mathbb{N}$

- **Initialisation**

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 3$ donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité**

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$ fixé, soit $u_n = 2^{n+1} + 1$ (HR)

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, soit $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$

Démonstration : D'après (HR), on a $u_n = 2^{n+1} + 1 \Rightarrow 2u_n - 1 = 2\left(2^{n+1} + 1\right) - 1 = 2^{n+2} + 1 \Rightarrow u_{n+1} = 2^{n+2} + 2$

Donc la propriété est héréditaire.

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=0$ et est héréditaire à partir de 0, alors par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1}+1$

Exemple 2

Soit (v_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2-v_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Réponses

1) On a : $v_1 = \dfrac{1}{2-v_0} = \dfrac{1}{2}$; $v_2 = \dfrac{1}{2-v_1} = \dfrac{2}{3}$; $v_3 = \dfrac{1}{2-v_2} = \dfrac{3}{4}$; $v_4 = \dfrac{1}{2-v_3} = \dfrac{4}{5}$

2) Raisonnons par récurrence. Posons $P(n)$: "$v_n = \dfrac{n}{n+1}$", $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation** :

Pour $n=0$, on a $v_0 = 0$ et $\dfrac{n}{n+1} = 0$ donc $P(0)$ est vraie

- **Hérédité** :

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$ fixé, soit $v_n = \dfrac{n}{n+1}$ (HR)

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, soit $v_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$

Démonstration : D'après (HR) on a : $v_n = \dfrac{n}{n+1} \Rightarrow 2 - v_n = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{1}{2-v_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$

Donc la propriété est héréditaire.

- **Conclusion** :

La propriété est initialisable pour $n=0$ et est héréditaire à partir de 0, alors par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{n}{n+1}$

Exemple 3

Soit (w_n) la suite numérique définie par : $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = \dfrac{w_n}{1+w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer w_1, w_2 et w_3

2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{2}{2n+1}$

Réponses

1) On a : $w_1 = \dfrac{w_0}{1+w_0} = \dfrac{2}{3}$; $w_2 = \dfrac{w_1}{1+w_1} = \dfrac{2}{5}$; $w_3 = \dfrac{w_2}{1+w_2} = \dfrac{2}{7}$

2) Raisonnons par récurrence. Posons $P(n)$: "$w_n = \dfrac{2}{2n+1}$", $n \in \mathbb{N}$

- **Initialisation**

Pour $n=0$, on a $w_0=2$ et $\frac{2}{2n+1}=2$ donc $P(0)$ est vraie

- **Hérédité**

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang $n\geq 0$ fixé, soit $w_n=\frac{2}{2n+1}$ (HR)

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, soit $w_{n+1}=\frac{2}{2n+3}$

Démonstration : D'après (HR) on a : $w_n=\frac{2}{2n+1} \Rightarrow w_{n+1}=\frac{w_n}{1+w_n}=\frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}}=\frac{2}{2n+3}$

Donc la propriété est héréditaire.

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=0$ et est héréditaire à partir de 0, alors par récurrence :

$\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=\frac{2}{2n+1}$

3 - 3 - Encadrement du terme général d'une suite

Exemple 1

On considère la suite $(u_n)\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3; n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

a/ Montrer que :$(\forall n\in\mathbb{N});1\leq u_n\leq 6$

b / Etudier le sens de variation de (u_n)

Réponses

a/ Raisonnons par récurrence. Posons $P(n):"1\leq u_n\leq 6"$, $n\in\mathbb{N}$

- **Initialisation**

Pour $n=0$, on a $u_0=2$ donc$1\leq u_0\leq 6$ alors $P(0)$ est vraie

- **Hérédité**

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang $n\geq 0$ fixé, soit $1\leq u_n\leq 6$ (HR)

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, soit $1\leq u_{n+1}\leq 6$

Démonstration : D'après (HR) on a : $1\leq u_n\leq 6 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 1\leq \frac{1}{2}u_n\leq \frac{1}{2}\times 6 \Rightarrow \frac{1}{2}+3\leq \frac{1}{2}u_n+3\leq 3+3$

$\Rightarrow \frac{7}{2}\leq u_{n+1}\leq 6 \Rightarrow 1\leq \frac{7}{2}\leq u_{n+1}\leq 6 \Rightarrow 1\leq u_{n+1}\leq 6$

Donc la propriété est héréditaire.

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=0$ et est héréditaire à partir de 0, alors par récurrence :
$\forall n\in\mathbb{N}, 1\leq u_n\leq 6$

b/ Etudions la monotonie de la suite (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = \frac{1}{2}(u_n + 6 - 2u_n) = \frac{1}{2}(6 - u_n)$.

Comme $1 \leq u_n \leq 6$ d'après la question a/, alors $6 - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ Par suite la suite (u_n) est croissante.

Exemple 2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > \frac{1}{2}$

3) a) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \geq 1$

Réponses

1) $u_1 = 5u_0 - 2 = 3$; $u_2 = 5u_1 - 2 = 13$

2) Raisonnons par récurrence. Posons $P(n)$: "$u_n > \frac{1}{2}$" , $n \in \mathbb{N}$

- **Initialisation**

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ donc $u_0 > \frac{1}{2}$ alors $P(0)$ est vraie

- **Hérédité**

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$ fixé, soit $u_n > \frac{1}{2}$ (HR)

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, soit $u_{n+1} > \frac{1}{2}$

Démonstration : D'après (HR) on a : $u_n > \frac{1}{2} \Rightarrow 5u_n > 5 \times \frac{1}{2} \Rightarrow 5u_n - 2 > \frac{5}{2} - 2 \Rightarrow u_{n+1} > \frac{1}{2}$

Donc la propriété est héréditaire.

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n = 0$ et est héréditaire à partir de 0, alors par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \frac{1}{2}$

3) a) Etudions la monotonie de la suite (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = 5u_n - 2 - u_n = 4u_n - 2 = 4\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

Comme $u_n > \frac{1}{2}$ alors $u_n - \frac{1}{2} > 0$ d'où $u_{n+1} - u_n > 0$, par conséquent la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Puis que la suite (u_n) est strictement croissante alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$

3 - 4 - Inégalité de Bernoulli

Exemple

1) Soit a un réel strictement positif.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), (1+a)^n \geq 1+na$ (**inégalité de Bernoulli**)

2) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

a) $2^n \geq 1+n$

b) $3^n \geq 1+2n$

c) $(1+n)^n \geq 1+n^2$

d) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

Réponses

1) Soit $a > 0$.

Raisonnons par récurrence. Posons $P(n):"(1+a)^n \geq 1+na", n \in \mathbb{N}$.

- <u>**Initialisation**</u>

Pour $n=0$, on a $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$ alors $P(0)$ est vraie

- <u>**Hérédité**</u>

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$ fixé, soit $(1+a)^n = 1+na$ (HR)

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, soit $(1+a)^{n+1} = 1+(n+1)a$

Démonstration : D'après (HR) on a : $(1+a)^n = 1+na \quad \Rightarrow (1+a)\times(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)$

$$\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a \text{ car } na^2 \geq 0$$

Donc la propriété est héréditaire.

- <u>**Conclusion**</u>

La propriété est initialisable pour $n=0$ et est héréditaire à partir de 0, alors par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n = 1+na$

2) a) Montrons que $2^n \geq 1+n$.

En effet d'après l'inégalité de Bernoulli on a : si $a > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n = 1+na$

En particulier si $a=1$, on a : $(1+1)^n \geq 1+n\times 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq 1+n$

b) De la même manière si on pose $a=2$ on a : $(1+2)^n \geq 1+2n$ soit $3^n \geq 1+2n$

c) Si $n=0$, on a : $(1+0)^0 = 1$ donc $(1+0)^0 \geq 1$ et si $n \neq 0$ en appliquant l'inégalité de Bernoulli on a :

$(1+n)^n \geq 1+n\times n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, (1+n)^n \geq 1+n^2$

d) Si $n \neq 0$ on a : $\frac{1}{n} > 0$, en appliquant l'inégalité de Bernoulli on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\times\frac{1}{n}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

3 - 5 - Calcul de sommes par récurrence

Exemples

Montrer par récurrence que :

a/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. (On note : $\sum_{k=1}^{k=n} k = 1+2+3+...+n$).

b/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ..

c / Soit $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. $\forall n \in \mathbb{N};\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

d / $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\times\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{1}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{k}\times\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{n}{n+1}$ ..

Réponses

a/ Posons $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n$ et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- **Initialisation**

Pour $n=1$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ donc la propriété est vraie pour $n=1$.

- **Hérédité**

Supposons que la propriété est vraie pour un rang n fixé, soit $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (HR)

Et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$, soit $\sum_{k=1}^{n+1} k = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Démonstration : D'après (HR) on a : $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Alors la propriété est héréditaire.

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=1$ et est héréditaire à partir de 1, alors on a par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

b/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Raisonnons par récurrence. Posons $P(n):\text{"}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{"},\ n \in \mathbb{N}^*$

- **Initialisation**

Pour $n=1$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1$ donc la propriété est vraie pour $n=1$.

- **Hérédité**

Supposons que la propriété est vraie pour un rang n fixé, soit $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (HR)

Et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$, soit $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Démonstration : D'après (HR) on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Alors la propriété est héréditaire.

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=1$ et est héréditaire à partir de 1, alors on a par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c/ Soit $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Montrons cette égalité par récurrence.

- **Initialisation**

Pour $n=0$, on a : $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$ et $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$ donc la propriété est vraie pour $n=0$.

- **Hérédité**

Supposons que la propriété est vraie pour un rang n fixé, soit $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (HR)

Et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$, soit $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$.

Démonstration : D'après (HR) on a : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$

$$= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Alors la propriété est héréditaire.

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=0$ et est héréditaire à partir de 0, alors on a par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

d/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{n}{n+1}$.

Raisonnons par récurrence.

- **Initialisation**

Pour $n=1$, on a : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}$ donc la propriété est vraie pour $n=1$.

- **Hérédité**

Supposons que la propriété est vraie pour un rang n fixé, soit $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}=\frac{n}{n+1}$ (HR)

Et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$, soit $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}=\frac{(n+1)}{n+2}$.

Démonstration : D'après (HR) on a : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}=\frac{n}{n+1}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n+2}$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{\cancel{(n+1)}(n+1)}{\cancel{(n+1)}(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

Alors la propriété est héréditaire.

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=1$ et est héréditaire à partir de 1, alors on a par récurrence :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}=\frac{n}{n+1}$

3 - 6 - Monotonie d'une suite par récurrence

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ 0<u_n<2$

2) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Réponse

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ 0<u_n<2$.

- **Initialisation**

Pour $n=0$, on a : $u_0=1$, donc $0<u_0<2$ alors la propriété est vraie pour $n=0$

- **Hérédité**

Supposons que la propriété est vraie pour un entier $n\geq 0$, soit $0<u_n<2$ (HR)

Et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$, soit $0<u_{n+1}<2$.

Démonstration : D'après (HR), on a : $0<u_n<2\Rightarrow 2+0<2+u_n<2+2\Rightarrow 2<2+u_n<4$

$\Rightarrow\sqrt{2}<\sqrt{2+u_n}<2\Rightarrow 0<\sqrt{2}<u_{n+1}<2\Rightarrow 0<u_{n+1}<2$

Alors la propriété est héréditaire

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=0$ et est héréditaire à partir de 0, alors d'après le raisonnement par récurrence on a : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ 0<u_n<2$.

2) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$

- **Initialisation**

Pour $n=0$, on a : $u_0=1$ et $u_1=\sqrt{3}$, donc $u_0<u_1$ alors la propriété est vraie pour $n=0$

- **Hérédité**

Supposons que la propriété est vraie pour un entier $n\geq 0$, soit $u_n<u_{n+1}$ (HR)

Et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$, soit $u_{n+1}<u_{n+2}$.

Démonstration : D'après (HR), on a : $u_n<u_{n+1} \Rightarrow 2+u_n \leq 2+u_{n+1} \Rightarrow \sqrt{2+u_n} \leq \sqrt{2+u_{n+1}}$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

Alors la propriété est héréditaire

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=0$ et est héréditaire à partir de 0, alors d'après le raisonnement par récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n<u_{n+1}$ d'où la suite (u_n) est croissante.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+2u_n};\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $0<u_n\leq \dfrac{1}{3}$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Réponses

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<u_n\leq\dfrac{1}{3}$

- **Initialisation**

Pour $n=1$, on a : $u_1=\dfrac{1}{3}$, donc $0<u_1\leq\dfrac{1}{3}$. Alors la propriété est vraie pour $n=1$

- **Hérédité**

Supposons que la propriété est vraie pour un entier $n\geq 1$, soit $0<u_n\leq\dfrac{1}{3}$ (HR)

Et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$, soit $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{3}$.

Démonstration : Notons f la fonction associée à la suite (u_n) définie sur l'intervalle $I=\left]0;\dfrac{1}{3}\right]$ par :

$f(x)=\dfrac{x}{1+2x}$ $[u_{n+1}=f(u_n)]$. La fonction f est dérivable sur $I=\left]0;\dfrac{1}{3}\right]$ et $f'(x)=\dfrac{1}{(1+2x)^2}$. Donc la fonction f est strictement croissante sur I.

D'après (HR) on a : $0<u_n\leq\dfrac{1}{3}$ et puisque la fonction f est croissante sur I, alors $f(0)<f(u_n)\leq f\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Alors $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{5}\leq\dfrac{1}{3}$; donc $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{3}$ (remarquer que $f(0)=0$ *et* $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{5}$).

Par conséquent la propriété est héréditaire

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=1$ et est héréditaire à partir de 1, alors d'après le raisonnement par récurrence on a : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ 0<u_n\leq\dfrac{1}{3}$

2) Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{1+2u_n}-u_n=\dfrac{u_n-u_n\left(1+2u_n\right)}{1+2u_n}=-\dfrac{2u_n^2}{1+2u_n}$

Comme $-2u_n^2<0$ et $1+2u_n>0$, alors $u_{n+1}-u_n<0$ donc la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante

3 - 7 - Egalités et inégalités

Exemple 1

Soit $\left(u_n\right)$ la suite numérique définie par : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=u_n+2n+3;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1) Etudier la monotonie de la suite $\left(u_n\right)$.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n>n^2$

Réponse

1) Soit $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}-u_n=u_n+2n+3-u_n=2n+3$

Comme $n\geq0$ donc $2n+3>0$ d'où $u_{n+1}-u_n>0$ par conséquent la suite $\left(u_n\right)$ est croissante.

2) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>n^2$.

- **Initialisation**

Pour $n=0$, on a $u_0=1$ et $0^2=0$. Alors la propriété est vraie pour $n=0$

- **Hérédité**

Supposons que la propriété est vraie pour un entier $n\geq0$, soit $u_n>n^2$ (HR)

Et montrons qu'elle est vraie pour $\left(n+1\right)$, soit $u_{n+1}>\left(n+1\right)^2$.

Démonstration : D'après (HR) on a : $u_n>n^2\Rightarrow u_n+2n+3>n^2+2n+3>n^2+2n+1\Rightarrow u_{n+1}>\left(n+1\right)^2$

Par conséquent la propriété est héréditaire

- **Conclusion**

La propriété est initialisable pour $n=0$ et est héréditaire à partir de 0, alors d'après le raisonnement par récurrence on a : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ u_n>n^2$

Exemple 2

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq6$: $2^n\geq\left(n+1\right)^2$

Réponse

Raisonnons par récurrence.

- Initialisation

Pour $n=6$, on a : $2^n=2^6=64$ et $\left(n+1\right)^2=\left(6+1\right)^2=49$, comme $64\geq49$ alors la propriété est vraie pour $n=6$.

- Hérédité

Supposons que la propriété est vraie pour un entier $n \geq 6$, soit $2^n \geq (n+1)^2$ (HR)

Et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$, soit $2^{n+1} \geq (n+2)^2$.

Démonstration : D'après (HR) on a : $2^n \geq (n+1)^2 \Rightarrow 2\times 2^n \geq 2(n+1)^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq \underline{2n^2+4n+2}$

Pour montrer que $2^{n+1} \geq \underline{(n+2)^2}$ il suffit de comparer $2n^2+4n+2$ avec $(n+2)^2$ et pour cela étudions le signe de $2n^2+4n+2-(n+2)^2 = n^2-2$, puisque $n \geq 6$ alors $n^2-2>0$ donc $2n^2+4n+2>(n+2)^2$

D'où $2^{n+1} \geq 2n^2+4n+2>(n+2)^2$, Enfin $2^{n+1} \geq (n+2)^2$

Par conséquent la propriété est héréditaire

- Conclusion

La propriété est initialisable pour $n=6$ et est héréditaire à partir de 6, alors d'après le raisonnement par récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 6),\ 2^n \geq (n+1)^2$

4 – Autre forme de la récurrence (récurrence forte)

Il existe d'autres exemples d'utilisation du raisonnement par récurrence où la rédaction est un peu différente que ce qu'on a vu jusqu'à maintenant. On va citer l'exemple d'une suite récurrente dont un terme est défini en fonction des deux termes précédents (suite linéaire de second ordre)

Exemple

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{5};\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{5}$

Réponse

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n+3^n}{5}$.

- Initialisation

Pour $n=0$, on a : $u_0 = \dfrac{2}{5}$ *et* $u_1 = 1$ et $\dfrac{2^0+3^0}{5} = \dfrac{2}{5} = u_0$ *et* $\dfrac{2^1+3^1}{5} = 1 = u_1$,

alors la propriété est vraie pour $n=0$ *et* $n=1$.

- Hérédité

Supposons que la propriété est vraie pour un entier n et au rang $(n+1)$, soit

$u_n = \dfrac{2^n+3^n}{5}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{5}$ (HR) et montrons qu'elle est vraie pour $(n+2)$, soit

$u_{n+2} = \dfrac{2^{n+2}+3^{n+2}}{5}$.

Démonstration : D'après (HR) on a : $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{5}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{5} \Rightarrow u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

$$=5\left(\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{5}\right)-6\left(\frac{2^{n}+3^{n}}{5}\right)=2^{n+1}+3^{n+1}-\frac{6}{5}\times 2^{n}-\frac{6}{5}\times 3^{n}=\left(2-\frac{6}{5}\right)\times 2^{n}+\left(3-\frac{6}{5}\right)\times 3^{n}$$

$$=\frac{4}{5}\times 2^{n}+\frac{9}{5}\times 3^{n}=\frac{2^{2}\times 2^{n}+3^{2}\times 3^{n}}{5}=\frac{2^{n+2}+3^{n+2}}{5}$$. Alors $u_{n+2}=\dfrac{2^{n+2}+3^{n+2}}{5}$

Par conséquent la propriété est héréditaire

- Conclusion

La propriété est initialisable pour $n=0$ et $n=1$ et est héréditaire à partir de 0, alors d'après le raisonnement par récurrence on a : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ u_n=\dfrac{2^{n}+3^{n}}{5}$

Exercice

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}+\dfrac{2}{n+2}u_n;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1\le u_n\le n^2$

II – Limites de suites

1 – Limite infinie

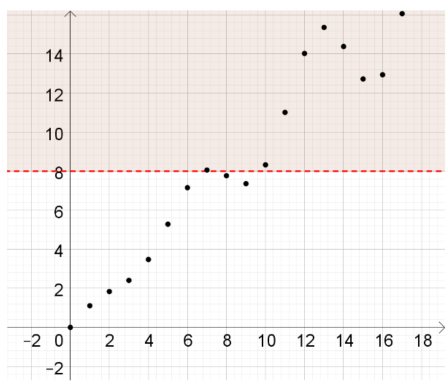
Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, qu'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, si pour tout réel strictement positif A, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
  Autrement dit : pour tout $A>0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n\ge N$, on a $u_n>A$
- On dit que u_n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, qu'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$, si pour tout réel strictement positif A, l'intervalle $]-\infty;-A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
  Autrement dit : pour tout $A>0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n\ge N$, on a $u_n<$ -A

Illustration

Soit (u_n) la suite dont le nuage des points $(n;u_n)$, $n\in\mathbb{N}$ est représenté ci-contre.



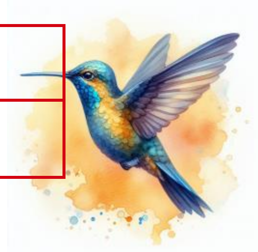
Par lecture graphique si on prend $A=4$ alors pour tout $n\ge 5$ on a : $u_n>A$

Et si $A=8$, alors pour tout $n\ge 10$ on a : $u_n>A$...

Si on prend un réel quelconque $A>0$, on trouvera un entier naturel p tel pour tout entier naturel $n\ge p$

on a : $u_n > A$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Suites de référence de limite infinie



$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty \left(p \in \mathbb{N}^*\right)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$	

2 – Limite finie

Définition

Soit (u_n) une suite réelle et $\mathrm{L} \in \mathbb{R}$.

On dit que u_n tend vers L lorsque n tend vers $+\infty$, qu'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$, si pour tout réel strictement positif ε, l'intervalle $]\mathrm{L}-\varepsilon ; \mathrm{L}+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Autrement dit : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq \mathrm{N}$, on a $|u_n - \mathrm{L}| < \varepsilon$

Théorème

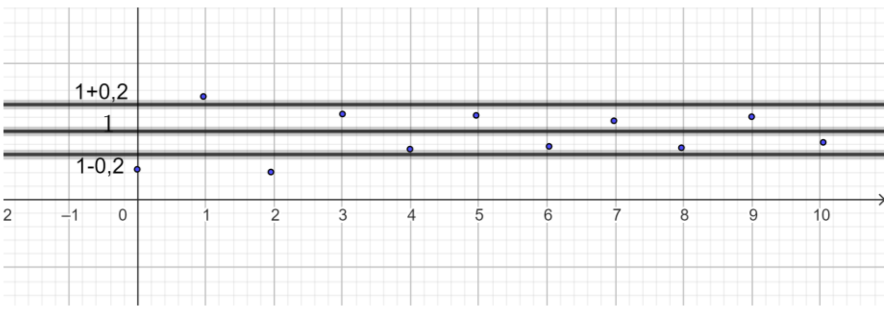
Soit (u_n) une suite réelle et L et L' deux réels.

Si u_n tend vers L et tend vers L' lorsque n tend vers $+\infty$, alors : $\mathrm{L} = \mathrm{L'}$

Autrement dit : si une suite admet une limite alors cette limite est unique

Illustration

Soit (u_n) la suite dont le nuage des points $(n;u_n)$, $n \in \mathbb{N}$ est représenté ci-dessous :



La suite (u_n) semble tendre vers 1. Si on prend $\varepsilon = 0,2$ on constate que tous les points du nuage de points représentants la suite sont situés sur la bande entre les droites d'équations $y = 1-0,2$ et $y = 1+0,2$ à partir du rang 3

Suites de référence de limite finie

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0 \left(p \in \mathbb{N}^*\right)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$	

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- Dire que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **convergente** signifie qu'il existe $\mathrm{L}\in\mathbb{R}$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$
- Dire que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **divergente** signifie qu'elle n'est pas convergente.

  Autrement dit si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ ou bien sa limite n'existe pas

3 – Limites et opérations sur les suites

3 – 1 – Limites de la somme de deux suites

Théorème

Soit (u_n) *et* (v_n) deux suites numériques. Alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L		$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

3 – 2 – limites du produit de deux suites

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_1}$ deux suites numériques. Alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$\mathrm{L}>0$ ou $+\infty$		$\mathrm{L}<0$ ou $-\infty$		0
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

Exemples

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n}+5$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n+5$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-n$

Réponses

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n}+5 = +\infty+\infty+5=+\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n+5 = "+\infty-\infty"\ (\mathrm{FI})$

  On a $n^2-n+5 = n^2\left(\dfrac{n^2-n+5}{n^2}\right) = n^2\left(\dfrac{n^2}{n^2}-\dfrac{n}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}\right) = n^2\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)$

  Comme $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2} = 1-0+0=1 \end{cases}$ alors par produit des limites

  $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n+5 = +\infty\times 1 = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-n = "+\infty-\infty"(\mathrm{FI})$

On a $\sqrt{n}-n=n\left(\frac{\sqrt{n}}{n}-1\right)$. Comme $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}-1=-1\end{cases}$ alors par produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-n=+\infty\times(-1)=-\infty$

3 – 3 – Limites du quotient de deux suites

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L > 0 ou $+\infty$		L < 0 ou $-\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	L' ≠ 0	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{L}{L'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Exemples

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{5n-1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2-n+1}{2n+6}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3-2n-3}{6n^4+7}$;

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{5n-1}=\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}$donc (FI)

On a : $\frac{2n+3}{5n-1}=\frac{\cancel{n}\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\left(5-\frac{1}{n}\right)}=\frac{2+\frac{3}{n}}{5-\frac{1}{n}}$

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{3}{n}=2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5-\frac{1}{n}=5\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{5n-1}=\frac{2}{5}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2-n+1}{2n+6}=\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}\ (FI)$

On a : $\frac{3n^2-n+1}{2n+6}=\frac{n^2\left(3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{6}{n}\right)}=\frac{n\left(3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{2+\frac{6}{n}}$

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{6}{n}=2\end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2-n+1}{2n+6}=\frac{+\infty}{2}=+\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3-2n-3}{6n^4+7}=\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}\ (FI)$

On a : $\dfrac{n^3-2n-3}{6n^4+7}=\dfrac{n^3\left(1-\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^4\left(6+\dfrac{7}{n^4}\right)}=\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}}{n\left(6+\dfrac{7}{n^4}\right)}$

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}=3\\ \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(6+\dfrac{7}{n^4}\right)=+\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3-2n-3}{6n^4+7}=0$

3 – 4 – Les formes indéterminées

Les formes indéterminées

$+\infty-\infty$	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\dfrac{0}{0}$	$0\times(\pm\infty)$

Remarques

- Lors d'un calcul de limites, avoir une forme indéterminée ne signifie pas que la limite n'existe pas, mais seulement que la procédure appliquée n'est pas la bonne et dés qu'on applique la bonne procédure on trouve le résultat.
- La technique utilisée dans la plupart des cas pour lever une forme indéterminée consiste à **factoriser**
- Il existe d'autres techniques pour lever une indétermination

4 – Limites par comparaison et par encadrement

4 – 1 – Limites et ordre

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques

- $\begin{cases}*\ (u_n)_{n\geq n_0} \text{ convergente}\\ *\ (\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geq N);\ u_n>0\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\geq 0$
- $\begin{cases}*\ (u_n)_{n\geq n_0} \text{ convergente}\\ *\ (v_n)_{n\geq n_1} \text{ convergente}\\ (\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N);u_n<v_n\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\leq\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

4 – 2 – Limites par comparaison

Théorème de comparaison

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_1}$ et $(w_n)_{n\geq n_2}$ trois suites numériques et $L\in\mathbb{R}$

- $\begin{cases}*\ (\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N);\ u_n>v_n\\ *\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
- $\begin{cases}\bullet\ (\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N);\ u_n<v_n\\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

- $\begin{cases} \bullet\bullet\ (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N);\ |u_n - L| < w_n \\ \bullet\bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$
- $\begin{cases} **\ (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N);\ w_n < u_n < v_n \\ **\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{L} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$ (théorème des gendarmes)

Exemples

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n+3+2\cos\left(n^2+5\right) \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sin(3n)-n^2 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\cos(-n+2)}{n+3} \ ; \ \lim_{n\to+\infty} n+(-1)^n$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n+3+2\cos\left(n^2+5\right)$ ne peut être calculée par la méthode directe.

  On sait que

  $-1 \le \cos\left(n^2+5\right) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\cos\left(n^2+5\right) \le 2 \Leftrightarrow n+3-2 \le n+3+2\cos\left(n^2+5\right) \le n+3+2$

  $\Leftrightarrow n+1 \le n+3+2\cos\left(n^2+5\right) \le n+5$

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ alors d'après un théorème de comparaison on a :

  $\lim\limits_{n\to+\infty} n+3+2\cos\left(n^2+5\right) = +\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(3n)-n^2$ ne peut pas être calculée par la méthode directe.

  On a : $-1 \le \sin(3n) \le 1 \Leftrightarrow -1-n^2 \le \sin(3n)-n^2 \le 1-n^2$

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-n^2 = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(3n)-n^2 = -\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\cos(-n+2)}{n+3}$ ne peut pas être calculée par la méthode directe.

  On a : $-1 \le \cos(-n+2) \le 1 \Leftrightarrow n-1 \le n+\cos(-n+2) \le n+1$

  $$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n+3} \le \frac{n+\cos(-n+2)}{n+3} \le \frac{n+1}{n+3}$$

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n+3} = 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+3} = 1$, d'après le théorème des gendarmes

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\cos(-n+2)}{n+3} = 1$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n$ ne peut pas être calculée par la méthode directe.

  On a : $-1 \le (-1)^n \le 1 \Leftrightarrow n-1 \le n+(-1)^n \le n+1$

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ donc d'après un théorème de comparaison on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n = +\infty$

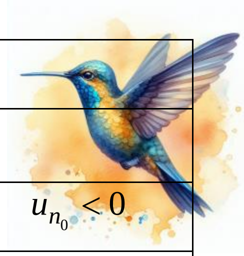
<u>Remarque</u>

- Les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n+1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(2n^5+n+2\right)$ n'existent pas
- La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (-a)^n$, lorsque $a > 0$, n'existent pas

5 – limite d'une suite géométrique

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_{n_0} \neq 0$. Alors :



Valeurs de q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$	
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	N'existe pas	0	1	$+\infty$	
Signe de u_{n_0}	-	-	-	$u_{n_0} > 0$	$u_{n_0} < 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	N'existe pas	0	u_{n_0}	$+\infty$	$-\infty$

Exemples

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \ ; \ \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n \ ; \ \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n \ ; \ \lim_{n\to+\infty}(-10)^n \ ; \ \lim_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{4}{7}\right)^n \ ; \ \lim_{n\to+\infty}(-1)^n$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < -\frac{2}{5} < 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{2} > 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(-10)^n$ n'existe pas car $-10 \leq -1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{4}{7} < 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ n'existe pas car $-1 \leq -1$.

6 – Utilisation du conjugué pour calculer une limite

Proposition 1

Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs et L un réel positif.

★ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n} = \sqrt{\mathrm{L}}$

★ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n} = +\infty$

Exemples

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{3n^2 - n + 5}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2n^3 + n + 1}{3n+5}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1+e^n}{e^n - 3}}$

Réponses

- On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 - n + 5 = \lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{3n^2 - n + 5} = +\infty$
- On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^3 + n + 1}{3n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^3}{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{3}n^2 = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2n^3 + n + 1}{3n+5}} = +\infty$

- On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+e^n}{e^n-3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cancel{e^n}\left(\frac{1}{e^n}+1\right)}{\cancel{e^n}\left(1-\frac{3}{e^n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^n}+1}{1-\frac{3}{e^n}} = 1$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n}+1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{3}{e^n} = 1$

Proposition 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}}$$

Exemples 1

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3} - n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1-\sqrt{4n^2+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{3n^2+n+4}-\sqrt{3n^2+n+7}}$

Réponses

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = "+\infty-\infty"(FI)$ Pour lever cette indétermination multiplions par le conjugué :

On a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3} - n = "+\infty-\infty"\ (FI)$ Pour lever cette indétermination multiplions par le conjugué :

On a : $\sqrt{n^2+3} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+3}+n} = \frac{n^2+3-n^2}{\sqrt{n^2+3}+n} = \frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3} - n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3} + n = +\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1-\sqrt{4n^2+1} = "+\infty-\infty"\ (FI)$ Pour lever cette indétermination multiplions par le

conjugué : On a : $2n+1-\sqrt{4n^2+1} = \frac{\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)}{2n+\sqrt{4n^2+1}} + 1 = \frac{4n^2-4n^2-1}{2n+\sqrt{4n^2+1}} + 1$

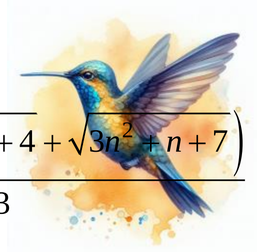
$= 1 - \frac{1}{2n+\sqrt{4n^2+1}}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1-\sqrt{4n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2n+\sqrt{4n^2+1}} = 1$ car

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+\sqrt{4n^2+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+\sqrt{4n^2+1}} = 0$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{3n^2+n+4}-\sqrt{3n^2+n+7}} = "\dfrac{+\infty}{+\infty-\infty}" \,(FI)$ Pour lever cette indétermination multiplions

par le conjugué :



On a :

$$\frac{2n+1}{\sqrt{3n^2+n+4}-\sqrt{3n^2+n+7}} = \frac{(2n+1)\left(\sqrt{3n^2+n+4}+\sqrt{3n^2+n+7}\right)}{-3} = -\frac{(2n+1)\left(\sqrt{3n^2+n+4}+\sqrt{3n^2+n+7}\right)}{3}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{3n^2+n+4}-\sqrt{3n^2+n+7}} = -\infty$

Exemple 2

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1}-n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+3n+1}-2\sqrt{n^2+n+1}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1}-n = "+\infty-\infty" \,(FI)$

On a : $\sqrt{n^2+n+1}-n = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \dfrac{\cancel{n^2}+n+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$

$$= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n} = \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$$

Comme $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1 = 2 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1}-n = \dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+3n+1}-2\sqrt{n^2+n+1} = "+\infty-\infty" \,(FI)$

On a : $\sqrt{4n^2+3n+1}-2\sqrt{n^2+n+1} = \dfrac{4n^2+3n+1-4\left(n^2+n+1\right)}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2\sqrt{n^2+n+1}} = \dfrac{-n-3}{\sqrt{4n^2+3n+1}-2\sqrt{n^2+n+1}}$

$$= \frac{n\left(-1-\frac{3}{n}\right)}{n\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+n\times 2\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{\cancel{n}\left(-1-\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{-1-\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

Comme $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} -1-\dfrac{3}{n} = -1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+2\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 4 \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+3n+1}-2\sqrt{n^2+n+1} = -\dfrac{1}{4}$

Remarque

On peut utiliser la multiplication par le conjugué seulement lorsque dans le produit du terme avec son conjugué l'exposant dominant disparait sinon il faut avoir recours à une autre technique.

Exemples

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3n^2+n+2}-2n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{2n^2+n+1}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3n^2+n+2}-2n = "+\infty-\infty"\ (FI)$

On a : $\left(\sqrt{3n^2+n+2}\right)^2-(2n)^2 = 3n^2+n+2-4n^2 = -n^2+n+2$ donc n^2 n'a pas disparu, donc pour calculer cette limite il suffit de factoriser par n.

$$\sqrt{3n^2+n+2}-2n = n\sqrt{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}-2n = n\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}-2\right).$$

Comme $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-2 = \sqrt{3}-2 \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3n^2+n+2}-2n = \left(\sqrt{3}-2\right)\times(+\infty) = -\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{2n^2+n+1} = "+\infty-\infty"\ (FI)$

On remarque que n^2 dans les deux quantités n'a pas le même coefficient donc on utilise la factorisation

$$\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{2n^2+n+1} = n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}-n\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$$

Comme

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1-\sqrt{2} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{2n^2+n+1} = \left(1-\sqrt{2}\right)\times(+\infty) = -\infty$

7 - Convergence des suites monotones

Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que la suite (u_n) est majorée si, et seulement s'il existe un réel M tel que :
  $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \le \mathrm{M}$
- On dit que la suite (u_n) est minorée si, et seulement s'il existe un réel m tel que :
  $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \ge m$
- On dit que la suite (u_n) est bornée si, et seulement si elle est majorée et minorée

Théorème 1

- ★ Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente
- ★ Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente

Remarques

- Le théorème précédent affirme l'existence de la limite, mais ne donne pas la valeur de la limite
- Si une suite $(u_n)_{n\ge n_0}$ est croissante et majorée par le nombre M, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le M$
- Si une suite $(u_n)_{n\ge n_0}$ est décroissante et minorée par m, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ge m$

- Si une suite est croissante, alors elle est :
  - Soit majorée et convergente
  - Soit non majorée et divergente vers $+\infty$
- Si une suite est décroissante, alors elle est :
  - Soit minorée et convergente
  - Soit non minorée et divergente vers $-\infty$

Corollaire

- Toute suite décroissante et positive est convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$
- Toute suite croissante et négative est convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 0$

Théorème 2

- Toute suite croissante et non majorée, est divergente vers $+\infty$
- Toute suite décroissante et non minorée est divergente $-\infty$

Exemple 1

1) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > -3$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 3$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$

b) Déterminer l'expression de v_n et de u_n en fonction de n

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

8 - Limite de suites définies par des fonctions

8 – 1 – Limite d'une suite de la forme $v_n = f(u_n)$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$. On considère la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie par : $(\forall n \geq n_0);\ v_n = f(u_n)$.

Si $\begin{cases} * (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N);\ u_n \in \mathrm{I} \\ * \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L} \\ * f \text{ est continue en } \mathrm{L} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(\mathrm{L})$

8 – 2 – Limite d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique définie par :

$u_{n+1} = f(u_n)$

Si $\begin{cases} \bullet\ f \text{ est continue sur } I \\ \bullet\ f(I) \subset I \\ \bullet\ u_{n_0} \in I \\ \bullet\ (u_n)_{n\geq n_0} \text{ est convergente} \end{cases}$ alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$