Chapitre 1 : Ensembles de nombres

Table des matières

1 - Appartenance et inclusion 2

2 - Les nombres entiers naturels 2

2 – 1 - Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

2 - 2 - Multiples et diviseurs d'un entier naturel

2 - 3 - Entiers naturels pairs et entiers naturels impairs

2 - 4 - Nombres entiers naturels premiers

2 - 5 - Décomposition d'un entier naturel en un produit de facteurs premiers

3 - Les nombres entiers relatifs 4

4 - Les nombres décimaux 4

4 - 1 - Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

4 - 2 - Encadrement décimal d'un nombre à 10^{-n} près

5 - Les nombres rationnels 5

5 - 1 - Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

5 - 2 - Opérations sur les nombres rationnels

5 - 3 - Comparaison des nombres rationnels

5 - 4 - Comment reconnaitre un nombre rationnel ?

6 - Les puissances 7

6 - 1 - Règles de calcul sur les puissances

6 - 2 - Règles de calcul sur les puissances de 10

7 - L'écriture scientifique d'un nombre 8

8 - Les nombres réels 8

8 - 1 - Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

8 - 2 - Représentation des nombres réels sur une droite graduée

9 - Racines carrées 9

9 - 1 - Définitions et propriétés

9 - 2 - Règles de calcul sur les racines carrées

9 - 3 - Comparaison des racines carrées

10 - Calcul littéral 10

10 - 1 - Développement

10 - 2 - Factorisation

Chapitre 1 : Ensembles de nombres

1 – Appartenance - Inclusion

Définition

- On dit que a appartient à l'ensemble A, et on écrit $a \in A$ lorsque a est un élément de A
- On dit que a n'appartient pas à l'ensemble A, et on écrit $a \notin A$ lorsque a n'est pas un élément de A
- On dit que B est inclue dans A, et on écrit $B \subset A$ lorsque B est une partie de A
- On dit que B n'est pas inclue dans A, et on écrit $B \not\subset A$ lorsque B n'est pas une partie de A

Exemples

- $15 \in \mathbb{N}; \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$
- $\{1,2,7,11\} \subset \mathbb{N}$ et $\{-3,-1,0\} \not\subset \mathbb{N}$

2 – Les nombres entiers naturels

2 - 1 – L'ensemble des entiers naturels

Définition

- L'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4...\}$
- L'ensemble des entiers naturels non nuls : $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,5,...\}$

Remarque

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ contient une infinité de nombres entiers positifs ou nuls

2 – 2 – Multiples et diviseurs d'un entier naturel

Définition

Soient a *et* b deux entiers naturels.

- Dire que b est un multiple de a s'il existe un entier k tel que : $b = a \times k$
- Dire que a est un diviseur de b s'il existe un entier k tel que : $b = a \times k$

Exemples

- Les multiples de 7 sont : 0 ; 7 ; 14 ; 21 ; 28 ; ...
- Les multiples de a sont : 0 ; a ; 2 a ; 3 a ; 4 a ;...
- Les diviseurs de 60 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60

Démonstration au programme

Montrer que la somme de deux multiples d'un entier a est aussi un multiple de a

2 – 3 – Entiers naturels pairs – Entiers naturels impairs

Définition

- Un entier naturel est pair s'il est multiple de 2
- Un entier naturel est impair s'il n'est pas un multiple de 2

Proposition

- Chaque entier naturel pair s'écrit sous la forme $2k$ où $k \in \mathbb{N}$
- Chaque entier naturel impair s'écrit sous la forme $(2k+1)$ où $k \in \mathbb{N}$

Règle de divisibilité par 2
Un entier naturel est pair si son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8

Propriétés (Parité et opérations)
- ★ (Pair) + (Pair) = Pair
- ★ (Impair) + (Impair) = Pair
- ★ (Pair) x (Pair) = Pair
- ★ (Pair) x (Impair) = Pair
- ★ (Impair) x (Impair) = Impair
- ★ $(\text{Pair})^n = \text{Pair}$
- ★ $(\text{Impair})^n = \text{Impair}$

Démonstration au programme
Montrer que le carré d'un entier impair est impair

2 – 4 – Règles de divisibilité

Règles
- ★ Un entier est divisible par 2 s'il se termine par : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8
- ★ Un entier est divisible par 5 s'il se termine par : 0 ou 5
- ★ Un entier est divisible par 10 s'il se termine par 0
- ★ Un entier est divisible par 3 si la somme de tous ses chiffres est divisible par 3
- ★ Un entier est divisible par 9 si la somme de tous ses chiffres est divisible par 9
- ★ Un entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4
- ★ Un entier est divisible par 25 si ses deux derniers chiffres sont : 00 ; 25 ; 50 ou 75

2 – 5 – Nombres premiers

Définition
Un entier naturel a est premier si et seulement s'il possède exactement deux diviseurs entiers naturels 1 et lui-même.

Remarques
- 1 n'est pas premier
- 0 n'est pas premier

Les entiers premiers inférieurs à 100
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Théorème (Comment montrer qu'un entier naturel n est premier ou non)
Pour déterminer si un entier naturel n est premier, on applique les étapes suivantes :
- ★ On donne une valeur approchée de $\sqrt{n}$
- ★ On teste la divisibilité de n par les diviseurs premiers de n qui sont inférieurs à $\sqrt{n}$ Successivement
- ★ Si aucun des entiers premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ ne divise n, alors on conclut que n est un nombre premier
- ★ Par contre si on trouve qu'un entier premier inférieur à $\sqrt{n}$ divise n, alors on conclut que n n'est pas premier

Remarque

Lorsque la calculatrice est autorisée, on peut s'en servir pour vérifier si un entier donné est premier ou non

Exemples

Parmi les entiers suivants déterminer ceux qui sont premiers : 351 ; 137 ; 343.

- On a $\sqrt{351} \simeq 33,3$
  Les entiers premiers inférieurs à 33,3 sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31
  On constate que $3+5+1=9$ donc 3 est un diviseur de 351
  Alors 351 n'est pas premier
- On a $\sqrt{137} \simeq 11,7$
  Les entiers naturels premiers inférieurs à 11,7 sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11
  On vérifie que : $2 \nmid 137;\ 3 \nmid 137;\ 5 \nmid 137;\ 7 \nmid 137\ et\ 11 \nmid 137$
  Alors 137 est premier
- On a $\sqrt{343} \simeq 18,5$
  Les entiers premiers inférieurs à $\sqrt{343}$ sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17
  On vérifie que : $2 \nmid 343;\ 3 \nmid 343;\ 5 \nmid 343\ et\ 7 / 343$ car $343 = 7 \times 49$. Alors 343 n'est pas premier

2 – 6 – Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

Règle

Soit a un entier naturel non nul tel que $a \neq 1$

Pour décomposer a en produit de facteurs premiers, on commence par le diviser par le plus petit de ses diviseurs premiers, on fait la même chose avec le quotient obtenu et on répète le même procédés jusqu' à obtenir le quotient 1

Exemples

1) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers suivants : 198 ; 325 ; 3542

198	2
99	3
33	3
11	11
1	

$198 = 2 \times 3^2 \times 11$

325	5
65	5
13	13
1	

$325 = 5^2 \times 13$

3542	2
1771	7
253	11
23	23
1	

3542=2×7×11×23

Exercice

1) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers $x = 168\ et\ y = 306$

2) Déterminer $PGCD(x, y)\ \ et\ \ PPCM(x, y)$

3) Rendre la fraction $\frac{168}{306}$ irréductible

3 – Les nombres entiers relatifs

Définition

♣ L'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

- L'ensemble des entiers relatifs non nuls : $\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$
- L'ensemble des entiers relatifs positifs : $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$
- L'ensemble des entiers relatifs négatifs : $\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$
- L'ensemble des entiers relatifs strictement positifs : $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\} = \mathbb{N}^*$
- L'ensemble des entiers relatifs strictement négatifs : $\mathbb{Z}_-^* = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$

Remarques

- $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}$ *et* $\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$
- Chaque entier naturel est aussi un entier relatif, donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- Il y a des entiers relatifs qui ne sont pas entiers naturels , par exemple : $-3 \in \mathbb{Z}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$

4 – Les nombres décimaux

Définition

Un nombre est décimal s'il s'écrit avec un nombre fini de chiffres à droite de la virgule.
On note par $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux
On note par $\mathbb{D}^*$ l'ensemble des nombres décimaux non nuls

Exemples

- $\frac{3}{8} = 0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ donc $\frac{3}{8} \in \mathbb{D}$
- $-\frac{7}{2000} = -\frac{35}{10000} = \frac{-35}{10^4}$ donc $-\frac{7}{2000} \in \mathbb{D}$
- $-21 = \frac{-21}{1} = \frac{-21}{10^0}$ donc $-21 \in \mathbb{D}$

Remarques

- Chaque entier naturel et relatif est un nombre décimal
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$
- Un nombre a est décimal si on peut l'écrire sous la forme $a = \frac{b}{10^n}$ *où* $b \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$

5 – Les nombres rationnels

5 – 1 – L'ensemble des nombres rationnels

Définition

- Un nombre est rationnel s'il s'écrit sous la forme d'une fraction de deux entiers
- L'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$
- L'ensemble des nombres rationnels non nuls : $\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, p \in \mathbb{Z}^* \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

Exemples

- $2,5 \in \mathbb{Q}$ $\qquad -0,0125 \in \mathbb{Q}$ $\qquad 357 \in \mathbb{Q}$
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $\qquad \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$ $\qquad \frac{-34}{47} \in \mathbb{Q}$

Remarques

- Dans l'écriture d'un nombre rationnel sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, l'entier p s'appelle « le numérateur » et l'entier q s'appelle « le dénominateur »
- Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle. Donc chaque décimal est un nombre rationnel. D'où $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Proposition 1

★ Dans l'écriture décimale de chaque nombre rationnel il y a une suite de chiffres qui se répète indéfiniment. Cette suite de chiffres est appelée la période de ce nombre rationnel.

★ Si l'écriture décimale avec un nombre infini de chiffres à droite de la virgule est périodique, alors ce nombre est rationnel.

Exemples

- $\frac{1}{3} = 0,33333...3...$ est périodique de période 3, donc $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$
- $-\frac{1}{101} = -0,1188\ 1188\ 1188\ 1188...$ est périodique de période 1188, donc $-\frac{1}{101} \in \mathbb{Q}$ mais $-\frac{1}{101} \notin \mathbb{D}$
- 12,5732 5732 5732 5732 …est un nombre rationnel car son écriture est périodique de période 5732

Démonstration au programme

Montrer que $\frac{1}{3} \notin \text{ID}$

Proposition 2

Chaque nombre rationnel qui a un dénominateur qui s'écrit comme produit d'une puissance de 2 et d'une puissance de 5 est un nombre décimal.

Exemples

- $\frac{121}{2^3} = \frac{121}{8} = 15,125$. Donc $\frac{121}{2^3}$ $\frac{121}{2^3} \in \text{ID}$
- $\frac{23}{5^2} = 0,92$. Donc $\frac{23}{5^2} \in \text{ID}$
- $\frac{571}{2^3 \times 5^4} = 0,1142$. Donc $\frac{571}{2^3 \times 5^4} \in \text{ID}$

5 – 2 - Opérations sur les nombres rationnels

Règles des opérations sur les nombres rationnels

Soient a, b, c et d des entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$

★ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

★ $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

★ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

★ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$ donc $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$

Exemples

Calculer les expressions suivantes :

$\frac{11}{3}+\frac{5}{3}=$; $\frac{13}{6}+\frac{7}{12}=$; $\frac{8}{7}-\frac{3}{7}=$; $\frac{4}{15}-\frac{3}{5}=$; $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=$; $6\times\frac{11}{8}=$;

$\frac{7}{3}\div\frac{5}{4}=$; $\frac{\frac{21}{5}}{\frac{8}{11}}=$; $\frac{15}{7}\div 8=$; $\frac{4}{\frac{3}{7}}=$; $12\div\frac{13}{2}=$; $\frac{5}{\frac{3}{4}}=$;

Règles de priorité

★ La multiplication est prioritaire par rapport à l'addition et à la soustraction

★ La division est prioritaire par rapport à l'addition et à la soustraction

Exemples

Calculer les opérations suivantes :

$A=\frac{7}{3}\times\frac{5}{4}+\frac{11}{6}$; $B=\frac{3}{2}\times\frac{7}{4}-\frac{5}{3}$; $C=\frac{13}{7}+\frac{5}{2}\times\frac{3}{4}$; $D=5-\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$; $E=\frac{5}{3}\div\frac{7}{2}+\frac{2}{5}$; $F=7-\frac{3}{5}\div\frac{2}{3}$

5 – 3 – Comparaison des nombres rationnels

Proposition1 (égalité de deux fractions)

Soient a, b, c et d quatre nombres tels que $b\neq 0$ et $d\neq 0$.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\times d=b\times c$$

Exemples

- $\frac{143}{39}=\frac{11}{3}$ Car on a : $143\times 3=429=11\times 39$
- $\frac{-71}{17}=\frac{355}{-85}$ Car $(-71)\times(-85)=6035=17\times 355$

Proposition 2 (comparaison des fractions)

Soient a, b, c et d quatre nombres positifs tels que $b\neq 0$ et $d\neq 0$.

★ $\frac{a}{b}<\frac{c}{b}\Leftrightarrow a<c$

★ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad<bc$

★ $\frac{a}{b}<\frac{a}{c}\Leftrightarrow c<b$

Exemples

Comparer les fractions suivantes :

$\frac{116}{75}$ *et* $\frac{284}{191}$; $\frac{61}{96}$ *et* $\frac{101}{191}$; $\frac{17}{83}$ *et* $\frac{29}{83}$; $\frac{174}{87}$ *et* $\frac{174}{183}$

- On a : $116\times191=22156$ *et* $284\times75=21300$ donc $116\times191>284\times75$. Alors $\frac{116}{75}>\frac{284}{191}$
- On a : $96\times101=9696$ et $61\times191=11651$ donc $61\times191>96\times101$. Alors $\frac{61}{96}>\frac{101}{191}$
- On a : $17<29$ donc $\frac{17}{83}<\frac{29}{83}$
- On a : $87>83$, donc $\frac{174}{87}<\frac{174}{83}$

6 – Les puissances

6 – 1 – Règles de calcul sur les puissances

Définition

Soit a un nombre réel et n un entier naturel. On appelle puissance de a d'exposant n, le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\ fois\ a}$$

En plus $a^1=a$ $\quad 1^n=1$ $\quad 0^n=0\ (n\neq0)$ $\quad a^0=1(a\neq0)$

Règles sur les puissances

Soient a *et* b deux nombres non nuls et soient n *et* m deux entiers.

★ $a^n\times a^m=a^{n+m}$	★ $(ab)^n=a^n\times b^n$
★ $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	★ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
★ $(a^n)^m=a^{n\times m}$	★ $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$ et $\frac{1}{a}=a^{-1}$

Exemples

Calculer les nombres suivants : $A=\frac{2^4\times36^3\times125}{12^3\times50^2}$; $B=\frac{14^4\times16^2\times9^3}{49\times8^3\times27^2}$

- On a $A=\frac{2^4\times(2^2\times3^2)^3\times5^3}{(2^2\times3)^3\times(2\times5^2)^2}=\frac{2^4\times2^6\times3^6\times5^3}{2^6\times3^3\times2^2\times5^4}=\frac{2^{10}\times3^6\times5^3}{2^8\times3^3\times5^4}=\frac{2^{10-8}\times3^{6-3}}{5^{4-3}}=\frac{2^2\times3^3}{5}=21,6$
- On a $B=\frac{(2\times7)^4\times(2^4)^2\times(3^2)^3}{7^2\times(2^3)^3\times(3^3)^2}=\frac{2^4\times7^4\times2^8\times3^6}{7^2\times2^9\times3^6}=2^{12-9}\times7^{4-2}\times3^{6-6}=2^3\times7^2=392$

6 – 2 – Règles de calcul sur les puissances de 10

Règles de calcul des puissances de 10

Soit $n\in\mathbb{N}$.

★ $10^n=1\underbrace{000...0}_{n\text{ fois zéro}}$ (1 puis n zéros)

★ $10^{-n} = \underbrace{0,00...01}_{n \text{ fois zéro}}$ (n zéros puis 1)

Remarque

- Les propriétés énoncées dans le paragraphe précédent sur les puissances s'appliquent aussi sur les puissances de 10

Exemples

- $123\,km = 123000000\,mm$
- $715\,mg = 715\times10^{-6}\,kg = 0,000715\,kg$
- Des puissances de 10 particulières

Les multiples			
Nombre	Nom	Puissance	Symbole
10	Dix	10^1	Déca/ Da
100	Cent	10^2	Hecto/ H
1000	Mille	10^3	Kilo/ K
1000000	Million	10^6	Méga/ M
1000000000	Milliard	10^9	Giga/ G

Les sous multiples			
Nombre	Nom	Puissance	Symbole
0,1	Dixième	10^{-1}	Déci/ D
0,01	Centième	10^{-2}	Centi/ C
0,001	Millième	10^{-3}	Milli/ M
0,000001	Millionième	10^{-6}	Micro/ μ
0,000000001	Milliardième	10^{-9}	Nano/ η

7 – L'écriture scientifique d'un nombre

Définition

Soit A un nombre décimal positif non nul.

- Si $A \geq 1$, l'écriture scientifique de A est $A = a\times10^n$ où $a \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq a < 10$ et $n \in \mathbb{N}$
- Si $0 < A < 1$, l'écriture scientifique de A est $A = a\times10^{-n}$ où $a \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq a < 10$ et $n \in \mathbb{N}$

Exemples

Donner les écritures scientifiques des nombres suivants : $A = 251000000$ *et* $B = 0,000000325$

- On a $A = 251000000 = 2\underbrace{51000000}_{8\,chiffres} = 2,51\times10^8$
- On a $B = 0,000000325 = 0,\underbrace{0000003}_{7\,chiffres}25 = 3,25\times10^{-7}$

8 - Les nombres réels

8 – 1 – Ensemble des nombres réels

Définition 1

Un nombre est dit irrationnel lorsqu'il ne peut pas être écrit sous la forme d'une fraction de nombres rationnels.

Exemples

Les nombres $\sqrt{2}$; π ; e ; $\sqrt{3}$ ... sont des nombres irrationnels

Définition 2

Un nombre est dit réel lorsqu'il est soit un nombre rationnel soit un nombre irrationnel.

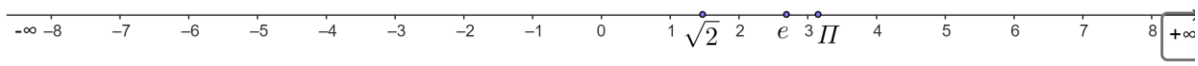
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$

Exemples

- Le nombre $9,101001000100001000001...$ n'est pas rationnel car son écriture décimale n'est pas périodique, il est un nombre **irrationnel**

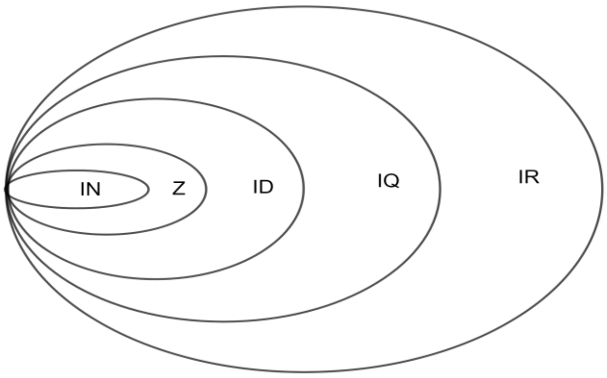
- $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95...$est **irrationnel** donc $\pi \in \mathbb{R}$
- $e = 2{,}71828182845904523536028747135 27...$ est **irrationnel** donc $e \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872420 97...$ est **irrationnel** donc $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $\frac{7}{17}$ est **rationnel** donc $\frac{7}{17} \in \mathbb{R}$

8 – 2 – Représentation des nombres réels sur une droite graduée



Remarques

- La droite graduée et orientée de la gauche vers la droite est la droite contenant des points qui ont pour abscisses des nombres réels. Elle est appelée aussi « la droite numérique »
- Les opérations dans l'ensemble IR ont des propriétés similaires à celles définies dans l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.
- Par définition un nombre rationnel est un nombre réel Donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- De proche en proche on a construit les nombres que l'on va utiliser : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Démonstration au programme

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

8 – 3 – Règles de calcul dans l'ensemble des nombres réels

Règles de calculs des réels

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$. Alors on a :

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- Si $c \neq 0$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

- $\dfrac{ka}{kb}=\dfrac{a}{b}$

9 – Racines carrées

9 – 1 – Définition et propriétés

Définition

Soit x un nombre réel positif, **la racine carrée** du nombre réel x **est le nombre réel positif** dont le carré est égal à x, on la note $\sqrt{x}$

Exemples

$\sqrt{25}=5$; $\sqrt{\dfrac{9}{169}}=\dfrac{3}{13}$; $\sqrt{17^2}=17$; $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Racines carrées particulières

$\sqrt{0}=0$	$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{25}=5$
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{121}=11$

Remarques

- $\sqrt{A}$ n'existe que si $A\geq 0$
- $\sqrt{-1}$ n'existe pas

Propriétés

Soient a et b deux nombres réels positifs. Alors on :

- $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ *et* $\sqrt{a^2}=a$
- $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
- Si en plus $b\neq 0$, on a: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Si $b\neq 0$ on a : $\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$
- Si $a\neq b$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

Exemples

Rendre les dénominateurs des fractions suivantes entiers : $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{5}{2+\sqrt{2}}$ *et* $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}}$

- $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\dfrac{5}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{5\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{5\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}=\dfrac{10-5\sqrt{2}}{2}$
- $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}=\dfrac{2+2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{15}}{1-5}=-\dfrac{2+2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}$

9 – 2 – Comparaison de deux racines carrées

Règle

Soient $a \ et \ b$ deux nombres positifs.

- ★ $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$
- ★ $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b$

Exemples

Comparer : $2\sqrt{3} \ et \ 3\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2} \ et \ \sqrt{5}$ et $\sqrt{3}+\sqrt{7} \ et \ \sqrt{10}$

- On a $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12 \ et \ \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$

  Comme $12 < 18$, alors $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ donc $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$
- On a $\sqrt{5}-\sqrt{2}-1 = \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)-1 = \dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-1 = \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-1$

  Comme $\sqrt{5} > \sqrt{4} \ et \ \sqrt{2} > 1$ alors $\sqrt{5}+\sqrt{2} > 3$ donc $1 > \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ d'où $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-1 < 0$

  Par suite $\sqrt{5}-\sqrt{2}-1 < 0$ donc $\sqrt{5} < \sqrt{2}+1$
- On a $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 = 3+2\sqrt{21}+7 = 10+2\sqrt{21} \ et \ \sqrt{10}^2 = 10$.

  Comme $2\sqrt{21} > 0 \ alors \ 10+2\sqrt{21} > 10 \ donc \ \left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)^2 > \sqrt{10}^2$.

  Par conséquent $\sqrt{3}+\sqrt{7} > \sqrt{10}$

10 – Calcul littéral

10 – 1 – Développement

Définition

Développer c'est transformer un produit en une somme

Formules de distributivité

- ★ $k(a+b) = k \times a + k \times b$
- ★ $k(a-b) = k \times a - k \times b$
- ★ $-k(a+b) = -k \times a - k \times b$
- ★ $-k(a-b) = -k \times a + k \times b$

Exemples

Développer et réduire les expressions suivantes : $A = -2(3x-5)$; $B = 3x(-7x+4)$ et $C = \sqrt{3}\left(2\sqrt{5}+4\sqrt{3}\right)$

- $A = -2(3x-5) = -2 \times 3x - 2 \times (-5) = -6x + 10$
- $B = 3x(-7x+4) = 3x \times (-7x) + 3x \times 4 = -21x^2 + 12x$
- $C = \sqrt{3}\left(2\sqrt{5}+4\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} \times \left(2\sqrt{5}\right) + \sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{15} + 4 \times \sqrt{3}^2 = 2\sqrt{15} + 12$

Formules de double distributivité

Soient $a, \ b, \ c \ et \ d$ des nombres réels.

- ★ $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

★ $(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$
★ $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$

Exemples

Développer et réduire les expressions suivantes : $A=(2x-3)(5+3x)$; $B=(1-x)(5x+3)$

- $A=(2x-3)(5+3x)=2x\times5+2x\times3x-3\times5-3\times3x=10x+6x^2-15-9x=6x^2+x-15$
- $B=(1-x)(5x+3)=1\times5x+1\times3-x\times5x-x\times3=5x+3-5x^2-3x=-5x^2+2x+3$

Identités remarquables

★ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
★ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
★ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
★ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
★ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
★ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
★ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Exemples

Développer et réduire les expressions suivantes : $A=(\sqrt{5}+2)^2$; $B=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$; $C=(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})$

- On a $A=(\sqrt{5}+2)^2=\sqrt{5}^2+2\times\sqrt{5}\times2+2^2=5+4\sqrt{5}+4=9+4\sqrt{5}$
- $B=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2=(3\sqrt{2})^2-2\times(3\sqrt{2})\times(2\sqrt{3})+(2\sqrt{3})^2=9\times2-12\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+4\times3=30-12\sqrt{6}$
- $C=(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})=3^2-\sqrt{7}^2=9-7=2$

10 –2– Factorisation

Définition
Factoriser c'est transformer une somme en un produit

En utilisant un facteur commun

★ $k\,a+k\,b=k(a+b)$
★ $k\,a-k\,b=k(a-b)$

Exemples

Factoriser les expressions suivantes : $A=3x+5x^2$; $B=14+49x$; $C=6x^3-9x^2+15x$;
$D=(2x-1)(x+4)-(2x-1)(7x+9)$

- $A=3x+5x^2=3\underset{\smile}{x}+5x\times\underset{\smile}{x}=x(3+5x)$
- $B=14+49x=7\times2+7\times7x=7(2+7x)$
- $C=6x^3-9x^2+15x=3x\times2x^2-3x\times3x+3x\times5=3x(2x^2-3x+5)$
- $D=\underline{(2x-1)}(x+4)-\underline{(2x-1)}(7x+9)=(2x-1)[(x+4)-(7x+9)]=(2x-1)[x+4-7x-9]$
  $=(2x-1)(-6x-5)=-(2x-1)(6x+5)$

Remarque
Parfois le facteur commun est caché, il faut le faire apparaitre avant de factoriser :

$E=(4x-6)(2x+1)-(6x-9)(x+2)=2\underline{(2x-3)}(2x+1)-3\underline{(2x-3)}(x+2)=(2x-3)\left[2(2x+1)-3(x+2)\right]$

$=(2x-3)[4x+2-3x-6]=(2x-3)(x-2)$

En utilisant les identités remarquables

- ★ $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$
- ★ $A^2+2A\times B+B^2=(A+B)^2$
- ★ $A^2-2A\times B+B^2=(A-B)^2$

Exemples

Factoriser les expressions suivantes : $A=4x^2-25$; $B=36x^2-7$; $C=(2x-1)^2-(x+5)^2$;
$D=9x^2+24x+16$; $E=3x^2+2\sqrt{6}x+2$.

- $A=4x^2-25=(2x)^2-5^2=(2x-5)(2x+5)$
- $B=36x^2-7=(6x)^2-\sqrt{7}^2=(6x-\sqrt{7})(6x+\sqrt{7})$
- $C=(2x-1)^2-(x+5)^2=\left[(2x-1)-(x+5)\right]\left[(2x-1)+(x+5)\right]=[2x-1-x-5][2x-1+x+5]$
  $=(x-6)(3x+4)$
- $D=9x^2+24x+16=(3x)^2+2\times4\times3x+4^2=(3x+4)^2$
- $E=3x^2+2\sqrt{6}x+2=\left(\sqrt{3}\,x\right)^2+2\sqrt{3}\,x\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=\left(\sqrt{3}\,x+\sqrt{2}\right)^2$