4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ……….…………..…(7.5 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse ……….…………..…(2.5 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes.........…(3.5 pts)

- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique ………….......(3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 :(7.5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$f(1)=\frac{1}{2} \text{ et pour tout } x\in]1,+\infty[\quad , \quad f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- Montrer que f est continue à droite en 1

0.5 2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 3- a) Soit $x\in]1,+\infty[$

En posant : $t=(x-1)^2$, vérifier que : $\dfrac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$

0.5 b) Montrer que $(\forall t\in]0,+\infty[)$, $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t}<\dfrac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0;t]$)

0.25 c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$

0.5 4- a) Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[$, $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=-\dfrac{\ln(x)}{x-1}\times\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$

0.5 b) En déduire que f est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5- Pour tout $x\in[1,+\infty[$ on pose $I(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2-1}{t^3}dt$ et $J(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2-1}{t^2}dt$

0.5 a) Montrer que : $\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\le I(x)\le J(x)$

0.5 b) Montrer que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $I(x)=\ln(x)-\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ et $J(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}$

0.5 c) Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}\times\dfrac{I(x)}{J(x)}$

0.5 d) En déduire que : $\forall x\in]1,+\infty[,\ -\dfrac{1}{2}\le f'(x)\le 0$

0.25 6- a) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.5 b) Tracer la courbe (C) (On prendra $\|\vec{i}\|=1\text{cm}$ et $\|\vec{j}\|=2\text{cm}$)

0.5 7- Montrer que l'équation $f(x)=x-1$ admet une unique solution a dans $]1,2[$

8- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$a_0\in[1,+\infty[\qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \qquad a_{n+1}=1+f(a_n)$$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ |a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|a_n - a|$

0.5 b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$

0.25 c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

EXERCICE2 :(2.5 points)

Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

0.5 1-a) Montrer que F est continue, strictement croissante sur $[0;1]$

0.5 b) En déduire que F est une bijection de $[0;1]$ vers $[0;\beta]$ avec $\beta = \int_0^1 e^{t^2} dt$

2- On note F^{-1} la bijection réciproque de F

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

0.5 a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)dt$

0.5 b) Montrer que $\ell = \frac{1}{\beta}\int_0^1 u\, e^{u^2} du$

(On pourra effectuer le changement de variable $u = F^{-1}(t)$)

0.5 c) En déduire que : $\ell = \frac{e-1}{2\beta}$

EXERCICE3 : (3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E_\alpha):\ z^2 - 2iz + \alpha = 0 \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{C}$$

Partie I :

0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta = -4(1+\alpha)$

0.25 b) Déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles l'équation (E_α) admette dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes.

0.5 2- On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α).

Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$

Partie II :

Soient Ω , M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α , z_1 et z_2

1- On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$

0.5 a) Déterminer z_1 et z_2 en fonction de m

0.25 b) En déduire que les points O , M_1 et M_2 sont alignés.

2-On suppose que les points O , M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

0.25 a) Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $Re\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$

0.5 b) Montrer que : $\left|z_1 - z_2\right|^2 = \left|z_1 + z_2\right|^2 - 4\,Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$

0.25 c) En déduire que $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $\left|z_1 - z_2\right| = 2$

0.25 3-a) Montrer que : $\left(z_1 - z_2\right)^2 = \Delta$

0.5 b) Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O

<u>EXERCICE4</u> : (3.5 points)

On considère dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$$\forall\left((a,b),(c,d)\right) \in \left(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\right)^2 \; ; \; (a,b)T(c,d) = \left(a\overline{d} + c,\, bd\right)$$

($\overline{d}$ étant le conjugué du nombre complexe d)

0.5 1-a) Vérifier que $(i,2)T(1,i) = (2,2i)$, puis calculer $(1,i)T(i,2)$

0.25 b) En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

0.5 2- Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

0.25 3- Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

0.5 4-a) Vérifier que $\forall(a,b) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$; $(a,b)T\left(-\dfrac{a}{\overline{b}}, \dfrac{1}{b}\right) = (0,1)$

0.5 b) Montrer que $\left(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, T\right)$ est un groupe non commutatif.

0.5 5-a) Montrer que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T

0.5 b) Montrer que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $\left(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, T\right)$

EXERCICE5 :(3 points)

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q

1 1- a) Montrer que p divise $r^{p-1}-1$ et que q divise $r^{q-1}-1$

0.5 b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)}-1$

0.5 c) Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)}-1$

1 2- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3 \quad [221]$ (On donne : $221 = 13\times 17$)

FIN