3 ساعات	مدة الإنجاز	الرياضيـــــــــــــــات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسلكيها – خيار فرنسية-	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail Eljaâfari

COMPOSANTES DU DUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Etude des fonctions numériques et calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ Ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n

0,25 — 1) a) vérifier que $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1+u_n}$ pour tout entier naturel n.

0,5 — b) Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout entier naturel n.

0,25 — 2) a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n.

0,5 — b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que (u_n) est convergente.

3) Soit (v_n) la suite numérique définie $v_n = \dfrac{2 - u_n}{1 - u_n}$ pour tout entier naturel n.

0,5 — a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

0,5 — b) Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n.

0,5 — c) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 :(3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5.

0,25 — 1) Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).

0,5 — 2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S).

0,5 — 3) a) Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega,(P)) = 3$.

0,25 — b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.

0,5 — 4) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P).

0,5 — b) Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ).

0,5 — c) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 3 :(4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3}(1 - i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$.

0,5 — 1) Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(z) \equiv \dfrac{-\pi}{4}[2\pi]$.

0,75 — 2) a) Montrer que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$ puis vérifier que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

0,75 — b) En déduire une forme trigonométrique du nombre complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail Eljaâfari

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'. On pose $R(B)=B'$, $R(A)=A'$ et $R(A')=A''$.

0,5 — a) Vérifier que $z'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)z$ et que $\arg(a')\equiv\frac{-\pi}{12}[2\pi]$ où a' est l'affixe du point A'.

0,5 — b) Montrer que l'affixe du point A'' est $a''=\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O, A'' et B sont alignés.

0,5 — c) Montrer que b', l'affixe de B', vérifie $b'=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$.

0,5 — d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O.

<u>Exercice 4 :(2 points)</u>

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1 , deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

On considère les événements suivants :

A : « les deux boules tirées portent le même numéro »

B : « la somme des numéros des boules tirées est 4 »

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail Eljaâfari

0,5 — 1) Montrer que $p(A)=\frac{1}{3}$

0,5 — 2) Montrer que $p(B)=\frac{5}{21}$.

0,5 — 3) Calculer $p(A\cap B)$.

0,5 — 4) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

<u>Problème :(8 points)</u>

<u>Partie I :</u>

On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=e^x$ et $v(x)=x$.

0,5 — 1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v.

0,25 — 2) Justifier graphiquement que $e^x-x>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,5 — 3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_u), la courbe (C_v) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

<u>Partie II :</u>

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=x+1-\ln\left(e^x-x\right)$.

0,25 — 1) a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

0,5 — b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=1-\ln\left(1-xe^{-x}\right)$.

0,5 — c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

0,25 — 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

0,5 — b) Vérifier que pour tout $x<0$, $f(x)=x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\dfrac{1}{xe^{-x}}\right)$.

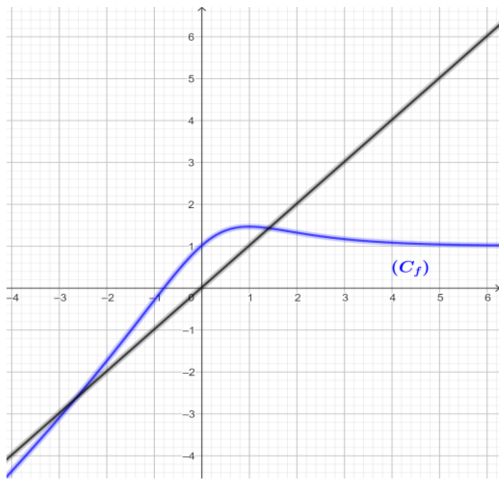
0,75 — c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$.

0,5 — 3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x-x}$

0,5 — b) Etudier le signe de la fonction dérivée de f, puis déduire le tableau de variations de f.

0,75 — c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1,0[$.

4) La courbe (C_f) ci-contre est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.



0,5 — a) Justifier graphiquement que l'équation $f(x)=x$ admet deux solutions α et β.

0,5 — b) Montrer que : $e^{\alpha}-e^{\beta}=\alpha-\beta$

5) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]-\infty,1]$.

0,5 — a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

(il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

0,75 — b) Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$.

FIN