الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2021

-الموضوع-

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

NS24F	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS	

المادة	الرياضيـــــــــــــات	مدة الإنجاز	4 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

✓ La durée de l'épreuve est de 4 heures

✓ L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux

✓ Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat

Exercice 1	L'analyse	12 points
Exercice 2	Les nombres complexes	4 points
Exercice 3	L'arithmétique	4 points

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge est à éviter

Exercice 1 : (10 points)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = -\frac{2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

Partie I :

0,5 1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - nx + 2\right)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0,5 b) Montrer que la courbe (C_n) admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.

0,5 2) a) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}),\ f_n'(x) = \frac{-2e^x}{\left(1+e^x\right)^2} + n$$

0,5 b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \dfrac{4e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \leq 1$

0,5 c) En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$

(On distinguera les deux cas : $n = 0\ et\ n \geq 1$)

0,5 3) a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_n) au point I d'abscisse 0.

0,5 b) Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe (C_n)

0,5 4) Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes $(C_0)\ et\ (C_2)$

5) Pour tout réel $t > 0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par (C_n) et les Droites d'équations respectives : $y = nx - 2,\ x = 0\ et\ x = t$

0,5 a) Calculer $A(t)$ pour tout $t > 0$

0,5 b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$

Partie II :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f_0(u_n)$

0,5 1) a) Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

0,5 b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), |f_0'(x)| \leq \frac{1}{2}$

0,5 2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0,5 b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

0,5 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers α

Partie III :

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$.

0,5 1) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de L'équation $f_n(x) = 0$.

0,5 b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$

(On prendra $\frac{2e}{1+e} < 1,47$)

0,5 2) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(x_n) > 0$

0,5 b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

0,5 c) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

0,5 3) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$

0,5 b) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que $\lim_{n\to+\infty} n x_n = 1$

0,5 4) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \leq x_2$

0,5 b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^n$.

Exercice 2 :(4 points)

Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a + b \neq c$

0,5 1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E): z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$$

0,5 b) On suppose, dans cette question, que : $a = i,\ b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$.

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les trois points non alignés A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A, et $Q(q)$ le Centre de la rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A et $D(d)$ le milieu du Segment $[BC]$.

1 a) Montrer que : $2p = b + a + (a-b)i$ et $2q = c + a + (c-a)i$

0,5 b) Calculer $\dfrac{p-d}{q-d}$

0,5 c) En déduire la nature du triangle PDQ.

3) Soient E le symétrique de B par rapport à P, et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$.

0,5 a) Montrer que l'affixe de K est $k = a + \dfrac{i}{2}(c-b)$

0,5 b) Montrer que les points K, P, Q et D sont cocycliques.

Exercice 3 :(4 points)

Partie I :

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E): $47x - 43y = 1$.

0,25 1) Vérifier que le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation (E)

0,75 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

Partie II :

On considère dans $\mathbb{Z}$, l'équation (F): $x^{41} \equiv 4\,[43]$.

1) Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F).

0,5	a) Montrer que x et 43 sont premiers entre eux et en déduire que : $x^{42} \equiv 1\,[43]$
0,5	b) Montrer que : $4x \equiv 1\,[43]$ et en déduire que : $x \equiv 11\,[43]$
0,5	2) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F).
	Partie III :
	On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant $(S):\begin{cases} x^{41} \equiv 4\,[43] \\ x^{47} \equiv 10\,[47] \end{cases}$
	1) Soit x une solution du système (S).
0,5	a) Montrer que x est solution du système $(S'):\begin{cases} x \equiv 11\,[43] \\ x \equiv 10\,[47] \end{cases}$
0,5	b) En déduire que : $x \equiv 527\,[2021]$ (On pourra utiliser la partie I)
0,5	2) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

FIN