Exercice 1 (SN2003)

Dans $\mathbb{N}^{*2}$, on considère l'équation $(E): x^2\left(x^2+7\right)=y(2x+y)$.

Soient x et y deux entiers naturels non nuls et $\delta=x\wedge y$. On pose $x=\delta a$ et $y=\delta b$.

1) On suppose que (x,y) est solution de l'équation (E).

a) Vérifier que $a^2\left(\delta^2 a^2+7\right)=b(2a+b)$

b) En déduire qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que : $\delta^2 a^2+7=kb$ et $2a+b=ka^2$

c) Montrer que $a=1$

d) En déduire que : $(b+1)^2=\delta^2+8$

2) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{N}^{*2}$.

Exercice 2 (SN2004)

1) Soit n un entier naturel.

a) Montrer que si n est impair, alors $n^2\equiv 1[8]$.

b) Montrer que si n est pair, alors $n^2\equiv 0[8]$ ou $n^2\equiv 4[8]$.

2) Soient a, b et c des entiers naturels impairs.

a) Montrer que $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré parfait.

b) Montrer que $2(ab+ac+bc)\equiv 6[8]$

(Remarquer que : $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$)

c) En déduire que $2(ab+bc+ca)$ n'est pas un carré parfait.

d) Montrer que $ab+bc+ca$ n'est pas un carré parfait.

Exercice 3 (SR2004)

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(E): 3x-2y=1$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(14n+3, 21n+4)$ est une solution de l'équation (E).

b) Déduire que les entiers $(14n+3)$ et $(21n+4)$ sont premiers entre eux.

3) Soit d le plus grand diviseur commun des entiers $(14n+3)$ et $(21n+4)$.

a) Montrer que $d=1$ ou $d=13$

b) Montrer que : $n\equiv 6[13] \Leftrightarrow d=13$

4) Pour tout entier naturel n tel que : $n\geq 2$, on pose :

$$A=21n^2-17n-4 \text{ et } B=28n^3-8n^2-17n-3$$

a) Montrer que les nombres A et B sont divisibles par $(n-1)$ dans $\mathbb{Z}$.

b) Déterminer suivant les valeurs de n, le plus grand diviseur commun de A et B

Exercice 4 (SN2005)

I - p est un entier naturel premier tel que $p\geq 5$.

1) Montrer que : $p^2\equiv 1[3]$

2) a) en utilisant la parité du nombre p, montrer qu'il existe un entier naturel q tel que : $p^2-1=4q(q+1)$.

b) Déduire que : $p^2\equiv 1[8]$

3) Montrer que : $p^2\equiv 1[24]$

II – Soit a un entier naturel premier avec 24.

1) Montrer que : $a^2 \equiv 1[24]$

2) Est-ce qu'il existe des entiers naturels $a_1, a_2, a_3, ..., a_{23}$ tels que :

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_{23}^2 = 23997$ et $(\forall k \in \{1,2,3,...,23\});\ a_k \wedge 24 = 1$.

Exercice 5 (SN2006)

On considère, dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'équation $(E): x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$.

1) Soit (x,y) une solution de l'équation (E).

On pose : $d = x \wedge y,\ x = ad\ et\ y = bd$.

a) Vérifier que : $b^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.

b) Déduire que : $b = 1$

c) Montrer que $a \neq 1$ et que $(a-1)$ divise $(a+1)$

d) Déduire que : $a = 2\ ou\ a = 3$.

2) Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'équation (E).

Exercice 6 (SN2007)

On considère l'équation $(E): 195x - 232y = 1$.

1) a) Déterminer $232 \wedge 195$

b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{(163+232k, 137+195k) / k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Déterminer le nombre entier naturel unique d vérifiant : $195d \equiv 1[232]\ et\ 0 \leq d \leq 232$.

2) Montrer que 233 est premier.

3) Soit A l'ensemble des entiers naturels compris entre $0\ et\ 232$. On considère l'application $\begin{array}{l} f: A \to A \\ \quad a \mapsto f(a) \end{array}$ où $f(a)$ est le reste de la division euclidienne du nombre a^{195} par 233.

On admet que : $(\forall a \in A - \{0\});\ a^{232} \equiv 1[233]$.

a) Montrer que : $(\forall (a,b) \in A^2);[f(a) = f(b) \Rightarrow a = b]$.

b) Soit $a\ et\ b$ de l'ensemble A tel que : $f(a) = b$. Déterminer a en fonction de b.

c) Déduire que l'application f est une bijection puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 7 (SR2007)

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) suivant : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ tel que $\begin{cases} a,b,p,q \in \mathbb{Z} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$.

1) a) Montrer qu'il existe (u_0, v_0) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $pu_0 + qv_0 = 1$

b) Montrer que $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ est une solution du système (S).

2) Soit x une solution du système (S), Montrer que le nombre pq divise le nombre $x - x_0$.

3) Soit x un entier relatif tel que pq divise le nombre $x - x_0$. Montrer que x est solution du système (S).

4) Déduire l'ensemble des solutions du système (S).

5) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$.