4 ساعات	مدة الإنجاز	الرياضيــــــــــــــات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

CONSIGNES

- ✓ **La durée de l'épreuve est de 4 heures**
- ✓ **L'épreuve comporte cinq exercices indépendants entre eux**
- ✓ **Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat**

Exercice 1	**L'analyse 1**	**7,75 points**
Exercice 2	**L'analyse 2**	**2,25 points**
Exercice 2	**Les nombres complexes**	**3,5 points**
Exercice 3	**L'arithmétique**	**3 points**
Exercice 4	**Les structures algébriques**	**3,5 points**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 : (7,75 points)

Partie I :

0,5 1) a) Montrer que : $\forall t \in [0,+\infty[; \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$

0,5 b) En déduire que : $\forall x \in [0,+\infty[; \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

0,5 2) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x)-1}{x} = \frac{-1}{2}$

Partie II :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \; et \; \forall x \in]0,+\infty[; f(x) = g(x)e^{-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,5 1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0,25 2) a) Montrer que f est continue à droite en 0

0,25 b) Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[; \frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x) + \left(\frac{g(x)-1}{x}\right)$

0,5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f_d'(0)$

0,75 3) Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ puis que :

$$\forall x \in]0,+\infty[; f'(x) = \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}e^{-x}$$

0,5 4) a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[; -\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

0,25 b) En déduire que : $\forall x \in]0,+\infty[; -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

0,25 5) a) Dresser le tableau de variation s de f

0,25 b) Construire la courbe (C) en faisant apparaitre la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (on prendra : $\|\vec{i}\| = 2cm$)

Partie III :

0,5 1) Montrer que l'équation d'inconnue x : $f(x)=3x$, admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$

2) Soient $\beta\in\mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0=\beta \text{ et } \forall n\in\mathbb{N};u_{n+1}=\frac{1}{3}f(u_n)$$

0,5 a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n\geq 0$

0,5 b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0,5 c) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N};\ |u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}|\beta-\alpha|$

0,5 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

<u>Exercice 2 :(2,25 points)</u>

On considère la fonction numérique $x\mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n};e^{\frac{k}{n}}\right)$

0,5 1) a) Montrer que : $\forall k\in\{0;1;\ldots;n\}\ \exists c_k\in\left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}}-e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}e^{c_k}$

0,25 b) Montrer que : $\forall k\in\{0;1;\ldots;n\};M_kM_{k+1}=\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

(M_kM_{k+1} désigne la distance de M_k à M_{k+1})

0,5 c) En déduire que : $\forall k\in\{0;1;\ldots;(n-1)\};\ \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leq M_kM_{k+1}\leq\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2) Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}M_kM_{k+1}$

0,5 a) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leq S_n\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

0,5 b) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

Exercice 3 :(3,5 points)

On considère le nombre complexe : $u=1+\left(2-\sqrt{3}\right)i$

0,5 1) a) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1-i$ et $1+i\sqrt{3}$

0,25 b) Montrer que : $\dfrac{(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

0,25 c) En déduire que : $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

0,5 d) Montrer que : $u=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$

2) On considère les deux suites numériques $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0=1,\ y_0=0 \text{ et } \left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\left(2-\sqrt{3}\right)y_n \\ y_{n+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)x_n+y_n \end{cases}$$

0,5 a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n+iy_n=u^n$

0,5 b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $x_n=\dfrac{\cos\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$ *et* $y_n=\dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe u^n

0,5 a) Déterminer les entiers naturels n pour lesquels les points $O,\ A_0$ *et* A_n sont alignés

0,5 b) Montrer que pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

Exercice 4 :(3 points)

Soit p **un nombre premier impair.**

On considère dans l'équation (E): $x^2\equiv 2\left[p\right]$

0,25 1) a) Montre que : $2^{p-1}\equiv 1\left[p\right]$

0,25 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\left[p\right]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\left[p\right]$

(on remarque que : $\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)=2^{p-1}-1$)

2) Soit x une solution de l'équation (E)

0,5 a) Montrer que p et x sont premiers entre eux

0,5 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\,[p]$ (on pourra utiliser le théorème de Fermat)

0,25 3) Montrer que pour tout $k \in \{1;2;\ldots;p-1\}$, p divise C_p^k

(on rappelle que $(\forall k \in \{1;2;\ldots;p-1\})$ $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ et que $kC_p^k = pC_{p-}^{k-1}$)

0,25 4) a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

(i étant le nombre complexe tel que $i^2=-1$)

0,5 b) On admet que : $(1+i)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

Montrer que : $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1\,[p]$

(on pourra utiliser la question 3))

0,5 5) En déduire que si $p \equiv 5\,[8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}$

Exercice 5 :(3,5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Partie I :

0,5 1) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0,25 2) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$

0,25 3) a) Vérifier que : $\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4;\ M(x,y)\times M(x',y') = M(xx'+3yy', xy'+yx')$

0,5 b) En déduire que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire

0,25 4) a) Vérifier que : $M(\sqrt{3},1)\times M(-\sqrt{3},1) = O$

0,25 b) En déduire que n'est pas un corps

Partie II :

Soient $F=\left\{x+y\sqrt{3}\,/\,(x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$ et $G=\left\{\mathrm{M(x,y)}=\begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix}/\,(x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

0,25 1) Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2;\ x+y\sqrt{3}=0$ si et seulement si($x=0$ *et* $y=0$)

0,25 2) Montrer que $F-\{0\}$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^*,\times\right)$

3) Soit φ l'application définie de $F-\{0\}$ vers E par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2-\{(0,0)\};\ \varphi\left(x+y\sqrt{3}\right)=M(x,y)$$

0,25 a) Vérifier que : $\varphi\left(F-\{0\}\right)=G-\{O\}$

0,25 b) Montrer que φ est un homomorphisme de $\left(F-\{0\},\times\right)$ vers $\left(\mathrm{E},\times\right)$

0,25 c) En déduire que $\left(\mathrm{G}-\{O\},\times\right)$ est un groupe commutatif

0,25 4) Montrer que $\left(\mathrm{G},+,\times\right)$ est un corps commutatif

FIN