المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة المركز الوطني للتقويم والامتحانات	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2022 -الموضوع-	الصفحة 1/5
	NS24F	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

المادة	الرياضيـــــــــــــــات	مدة الإنجاز	4 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

- ✓ La durée de l'épreuve est de 4 heures
- ✓ L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux
- ✓ Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat

Exercice 1	L'analyse	10 points
Exercice 2	Les nombres complexes	3,5 points
Exercice 3	L'arithmétique	3 points
Exercice 4	Les structures algébriques	3,5 points

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge est à éviter

Exercice 1 : (10 points)

0,25 **A-** 1) Vérifier que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right);0\le 1-x+x^{2}-\dfrac{1}{x+1}\le x^{3}$

0,25 2) En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right);0\le x-\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{x^{3}}{3}-\ln(1+x)\le\dfrac{x^{4}}{4}$

B- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=\frac{1}{2}\text{ et pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[\,;\ f(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^{2}}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

0,5 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0

0,5 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0,5 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 2) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\,]0;+\infty[\right);\ f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x^{3}}$

Où $g(x)=x+\dfrac{x}{x+1}-2\ln(1+x)$

0,5 b) Montrer que : $\left(\forall x\in I\right);0\le g'(x)\le x^{2}$.

0,25 c) En déduire que : $\left(\forall x\in I\right);0\le g(x)\le\dfrac{x^{3}}{3}$.

0,25 d) Déterminer le sens de variation de f sur I.

0,25 3) a) Dresser le tableau de variation de f

0,5 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

(On prendra $\|\vec{i}\|=2cm \ et \|\vec{j}\|=2cm$)

0,5 **C-** 1) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in\,]0;1[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.

2) On considère la suite $(u_{n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{0}=\dfrac{1}{3}\ et\ \left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\ u_{n+1}=f(u_{n})$

0,5 a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\ u_{n}\in[0;1]$

0,5 b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\ |u_{n+1}-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{3}\right)|u_{n}-\alpha|$

0,5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$

0,25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers α .

D- Pour tout $x\in I$, on pose : $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$

0,5 1) Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in I$.

0,5 2) a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x\in]0;+\infty[);\ F(x)=2\ln 2-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$

0,5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, puis en déduire que : $\int_0^1 f(t)dt=2\ln 2-1$

0,5 c) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses,

l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$

E- On pose, pour tout $k\in\mathbb{N},\ \ \Delta_k=f(k)-\int_k^{k+1} f(t)dt$ et pour tout

$n\in\mathbb{N},\ S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\Delta_k$

0,25 1) a) Vérifier que : $(\forall k\in\mathbb{N});\ 0\leq\Delta_k\leq f(k)-f(k+1)$

0,5 b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ 0\leq S_n\leq\frac{1}{2}$

0,25 2) a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone

0,25 b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

0,25 c) Montrer que la limite L de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2}-2\ln 2\leq L\leq\frac{1}{2}$

Exercice 2 :(3,5 points)

Soit m un nombre complexe non nul donné et $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I - On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue Z

$$(E_m):Z^2+mj^2Z+m^2j=0$$

0,5 1) Vérifier que : $j^3=1\ et\ 1+j+j^2=0$

0,25 2) a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta=\left[m(1-j)\right]^2$

0,5 b) Déterminer Z_1 *et* Z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0,5 3) Dans cette question, on suppose que : $m=1+i$.

Montrer que $(Z_1+Z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur

II - Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le poin $M'(z')$ tel que : $z'=(1+i)z$

0,25 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj *et* mj^2 et on note $A'(a'), B'(b')$ *et* $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application φ et soient $P(p), Q(q)$ *et* $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA'], [CB']$ *et* $[AC']$.

0,75 a) Montrer que : $a'=-mj^2$, $b'=-m$ *et* $c'=-mj$

0,25 b) Montrer que : $p+qj+rj^2=0$

0,5 c) En déduire que le triangle ***PQR*** est équilatéral.

Exercice 3:(3,5 points)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On considère dans $\mathbb{N}^2$, l'équation $(E_n):(x+1)^n-x^n=ny$.

Soit (x,y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n.

0,25 1) a) Montrer que : $(x+1)^n\equiv x^n[p]$

0,25 b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

0,25 c) En déduire que : $(x+1)^{p-1}\equiv x^{p-1}[p]$

0,5 2) Montrer que si n est pair alors l'équation (E_n) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}^2$.

3) On suppose que n est impair.

0,5 a) Montrer qu'il existe un couple (u,v) *de* $\mathbb{Z}^2$ *tel que* : $nu+(p-1)v=1$

(on rappelle que p est le plus petit diviseur de n)

0,25 b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr=1-(p-1)(v+nq)$.

0,5	a) On pose : $v' = -(v+nq)$. Montrer que : $v' \geq 0$
0,5	b) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 4 :(3,5 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z};+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$.

0,25 1) a) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,\times)$

0,25 b) Vérifier que pour tout a, b, c et d de $\mathbb{Z}$, on a :

$M(a,b) \times M(c,d) = M(ac+3bd, ad+bc)$

0,5 c) Montrer que $(E;+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire

0,5 2) Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par :

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a,b)) = |a^2 - 3b^2|$

Montrer que φ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

3) Soit $M(a,b) \in E$

0,25 a) Montrer que : $M(a,b) \times M(a,-b) = (a^2 - 3b^2).I$

0,5 b) Montrer que si $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ alors $\varphi(M(a,b)) = 1$

0,5 c) On suppose que $\varphi(M(a,b)) = 1$.

Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ et préciser son inverse

0,25 4) a) Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a,b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

0,25 b) En déduire que l'anneau $(E;+,\times)$ est intègre

0,25 c) est-ce que $(E;+,\times)$ est un corps ? justifier votre réponse

FIN