المادة	الرياضيـــــــــــــــــات	مدة الإنجاز	4 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

- ✓ **La durée de l'épreuve est de 4 heures**
- ✓ **L'épreuve comporte 6 pages numérotées de $^1/_6$ à $^6/_6$**
- ✓ **L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux**
- ✓ **Le candidat doit traiter EXERCICE3 et EXERCICE4 et choisir de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2**
- ✓ **Le candidat doit traiter au total trois exercices**

Exercice 1	**Arithmétique**	**3,5 points**
Exercice 2	**Structures algébriques**	**3,5 points**
Exercice 3	**Les nombres complexes**	**3,5 points**
Exercice 4	**L'analyse**	**13 points**

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

Exercice 1 : (3,5 points) (au choix)

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(D) : 7x^3 - 13y = 5$

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation (D)

0,5 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux

0,5 b) En déduire que : $x^{12} \equiv 1[13]$

1 c) Montrer que : $x^3 \equiv 10\ [13]$

0,5 d) En déduire que : $x^{12} \equiv 3\ [13]$

1 2) Déduire des questions précédentes que l'équation (D) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$

Exercice 2 : (3,5 points)(au choix)

On note par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble E de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \left\{ N(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} / \, x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{R} \right\}$$

0,5 1) a) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,5 b) Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E

0,5 c) Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

0,5 2) Montrer que $(E,\times)$ est un groupe non commutatif

3) On considère le sous-ensemble F de E défini par : $F = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} / \, x \in \mathbb{R}^* \right\}$

0,5 a) Montrer que l'application φ définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}^*);\ \varphi(x) = M(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(F,\times)$.

1 b) En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif (donner son élément neutre).

Exercice 3 : (3,5 points)(Obligatoire)

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$$

0,5 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (On remarque que m est une solution de l'équation (E))

2) On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m

0,25 a) Vérifier que : $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

0,5 b) Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$

On note P le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme O en A,

Q le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B

et R le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en O

0,25 1) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés

1 2) a) Montrer que l'affixe de P est $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0,5 b) Montrer que l'affixe de Q est $q = m\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

0,5 3) Montrer que $OQ = PR$ et que les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice 4 : (13 points) (Obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \text{ et } f(x)=x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

0,5 1) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction : $t \mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x;x+1]$, montrer que : $(P):(\forall x\in]0;+\infty[);\ \frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$

0,5 2) a) En utilisant la proposition (P), montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

0,5 b) En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0,75 3) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in]0,+\infty[),\ f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0,5 b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I (On pourra utiliser la proposition (P))

0,25 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

4) Pour tout $x\in]0;+\infty[$, on pose : $g(x)=\frac{f(x)}{x}$

0,75 a) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[);\ g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$ et en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

0,5 b) Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet sur $]0;+\infty[$ une solution unique α , puis vérifier que $\alpha\in]1;2[$ (On prendra $\ln(2)\simeq 0,7$ *et* $\ln\left(\frac{3}{2}\right)\simeq 1,5$)

0,5	c) en déduire que les seules solutions de l'équation $f(x)=x$ sont 0 et α
0,5	5) a) Représenter graphiquement la courbe (C).
	(On précisera la demi-tangente à droite en O et la branche parabolique de (C))
0,25	c) Montrer que f est une bijection de I vers I (On note f^{-1} sa bijection réciproque)
	Deuxième partie :
	On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
	$0<u_0<\alpha$ et $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
0,5	1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ 0<u_n<\alpha$
0,5	2) a) Montrer que : $g(]0;\alpha[)=]0;1[$
0,5	b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante
0,25	c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
0,5	3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
	Troisième partie :
	On considère la fonction F définie sur l'intervalle I par :
	$(\forall x\in I);\ F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$
0,5	1) a) Etudier suivant les valeurs de x, le signe de $F(x)$
0,5	b) Montrer que la fonction F est dérivable sur I et déterminer sa dérivée permière F'.
0,25	c) En déduire que F est strictement croissante sur I.
0,5	2) a) Montrer que : $(\forall x\in[1;+\infty[);\ F(x)\le(1-x)\ln 2$
0,25	b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$
0,5	3) a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :
	$(\forall x\in]0;+\infty[);\ F(x)=\dfrac{\ln 2}{4}-\dfrac{x^4}{4}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{4}\int_x^1\dfrac{t^3}{t+1}dt$
0,5	b) Calculer $\int_x^1\dfrac{t^3}{t+1}dt$ pour tout x de $]0;+\infty[$

(On remarque que : $\dfrac{t^3}{t+1} = i^2 - t + 1 - \dfrac{1}{t+1}$)

0,5 c) En déduire que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[);\ F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

0,5 d) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, et en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)\,dt$

4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

0,5 a) Montrer l'inégalité suivante :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*),(\forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\})\ -\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \le F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \le -\frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 b) En déduire l'inégalité suivante :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le v_n \le -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(On remarque que : $\dfrac{2k+1}{2n} < \dfrac{k+1}{n}$)

0,25 c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

FIN