I – Fonction linéaire

1 – Définition et vocabulaire

Définition

Soit a un nombre réel fixe.

- La relation qui à tout nombre réel x fait correspondre le nombre réel ax s'appelle une fonction linéaire de coefficient a , on écrit : $f : x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$
- Le nombre réel $f(x) = ax$ est l'image de x par la fonction linéaire f .
- Le nombre réel x est un antécédent de ax par la fonction linéaire f .

Exemples

1) On considère les fonctions $f, g\ et\ h$ définies par :

$$f : x \mapsto 3x\ (ou\ f(x) = 3x);\ \ g : x \mapsto \frac{1}{2}x\ (g(x) = \frac{1}{2}x)\ ;\ \ h : x \mapsto -\sqrt{2}x\ \ (h(x) = -\sqrt{2}x)$$

- f est une fonction linéaire de coefficient 3
- g est une fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{2}$
- h est une fonction linéaire de coefficient $-\sqrt{2}$

2) Soit f la fonction linéaire définie par : $f(x) = 5x$

a) Calculer $f(0), f(1), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right)\ et\ f\left(\sqrt{7}\right)$

b) Déterminer les images de $3\ et\ -5$ par f .

c) Déterminer le nombre qui a pour image 9 par f .

Réponse

a) $f(0) = 5\times 0 = 0$; $f(1) = 5\times 1 = 5$; $f(-2) = 5\times(-2) = -10$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 5\times\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$; $f\left(\sqrt{7}\right) = 5\times\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

b) L'image de 3 par f est $f(3) = 5\times 3 = 15$; et l'image de -5 par f est $f(-5) = 5\times(-5) = -25$.

c) On cherche x tel que $f(x) = 9$ donc $5x = 9$ d'où $x = \frac{9}{5}$

$\frac{9}{5}$ est appelé l'antécédent de 9 par f .

2 – Coefficient d'une fonction linéaire

Proposition

Soit f une fonction linéaire de coefficient a .

- ★ Le coefficient linéaire f est l'image de 1 par cette fonction.

  Autrement dit : $a = f(1)$

- ★ Pour tout nombre x non nul : $a = \frac{f(x)}{x}$

Exemples

1) $f(x) = \frac{3}{5}x$. La fonction f est une fonction linéaire de coefficient $a = f(1) = \frac{3}{5}$.

2) g est la fonction linéaire telle que : $g(2) = -7$.

Le coefficient de la fonction linéaire g est $a=\frac{g(2)}{2}=-\frac{7}{2}$.

3 – Représetation graphique d'une fonction linéaire

Proposition

★ Si une fonction est linéaire, alors sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

★ Réciproquement, si la représentation graphique d'une fonction est une droite qui passe par l'origine du repère, alors cette fonction est linéaire.

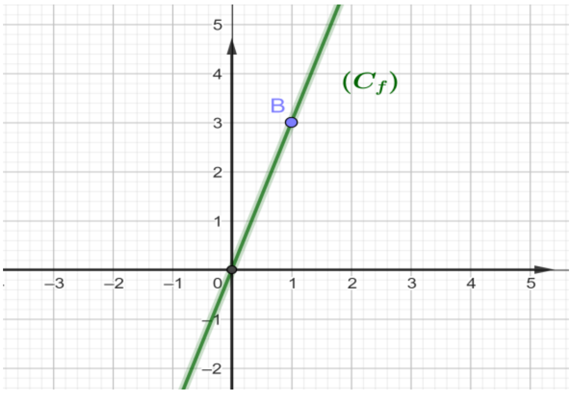
Exemples

1) Soit f la fonction linéaire telle que : $f(x)=3x$

La courbe de f passe par l'origine du repère

Et par le point $B(1,3)$.

Donc $(C_f)=(OB)$



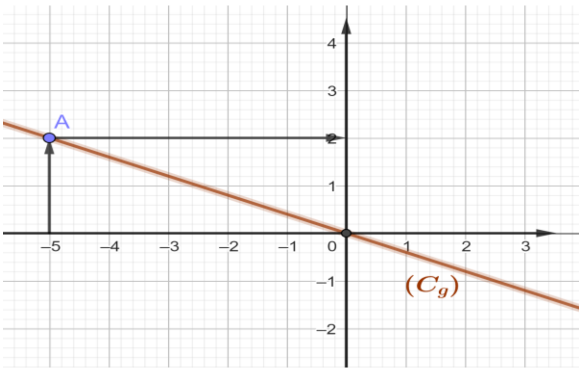
2) Soit g la fonction définie par sa représentation graphique ci-contre.

On a (C_g) est une droite qui passe par l'origine du repère

Donc la fonction g est linéaire de coefficient

$$a=\frac{g(-5)}{-5}=\frac{2}{-5}=-\frac{2}{5}$$

Alors : $g(x)=-\frac{2}{5}x$



Exercice

Soit h la fonction linéaire telle que : $h(2)=5$.

1) Déterminer l'expression de h.

2) Calculer les images de -1 et de $\frac{2}{5}$.

3) Déterminer l'antécédent de -3.

4) Sans faire aucun calcul, calculer $\frac{h(5973)}{5973}$.

5) Tracer la représentation graphique (C_h) dans un repère orthogonal $(O;I,J)$.

II – Fonction affine

1 – Définition et vocabulaire

Définition

Soit a et b deux nombres réels fixes.

- La relation qui à tout nombre réel x fait correspondre le nombre réel $ax+b$ s'appelle **une fonction affine de coefficient a**, on écrit : $f: x \mapsto ax+b$ ou $f(x)=ax+b$
- Le nombre réel $f(x)=ax+b$ est l'image de x par la fonction affine f.
- Le nombre réel x est un antécédent de $ax+b$ par la fonction affine f.
- Le nombre réel a est appelé **le coefficient de la fonction affine f**
- Le nombre réel b est appelé **l'ordonnée à l'origine de la fonction affine f**.

Exemples

1) On considère les fonctions f, g et h définies par :

$$f: x \mapsto 3x+5 \ (ou\ f(x)=3x+5);\quad g: x \mapsto \frac{1}{2}x-3\ \left(g(x)=\frac{1}{2}x-3\right);\quad h: x \mapsto -\sqrt{2}x+\frac{2}{3}\ \left(h(x)=-\sqrt{2}x+\frac{2}{3}\right)$$

- f est une fonction affine de coefficient 3 et d'ordonnée à l'origine 5.
- g est une fonction affine de coefficient $\frac{1}{2}$ et d'ordonnée à l'origine -3.
- h est une fonction linéaire de coefficient $-\sqrt{2}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{2}{3}$.

2) Soit f la fonction affine définie par : $f(x)=5x-2$ ou $f: x \mapsto 5x-2$

a) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{2}{5}\right)$ et $f\left(\sqrt{7}\right)$

b) Déterminer les images de 3 et -5 par f.

c) Déterminer le nombre qui a pour image 17 par f.

Réponse

a) $f(0)=5\times0-2=-2$; $f(1)=5\times1-2=3$; $f(-2)=5\times(-2)-2=-12$; $f\left(\frac{2}{5}\right)=5\times\left(\frac{2}{5}\right)-2=2-2=0$;

$f\left(\sqrt{7}\right)=5\times\sqrt{7}-2=5\sqrt{7}-2$

b) L'image de 3 par f est $f(3)=5\times3-2=15-2=13$; et l'image de -5 par f est $f(-5)=5\times(-5)-2=-27$.

c) On cherche x tel que $f(x)=17$ donc $5x-2=23$ d'où $x=5$.

5 est appelé l'antécédent de 23 par f.

2 – Coefficient d'une fonction affine

Proposition

Soit f une fonction affine de coefficient a et d'ordonnée à l'origine b. Alors :

- ★ $b=f(0)$
- ★ Pour deux nombres réels x_1 et x_2 tels que $x_1 \neq x_2$, on a : $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Exemples

1) $f(x)=\frac{3}{5}x+2$. La fonction f est une fonction affine de coefficient $a=\frac{3}{5}$ et $b=2$

2) g est la fonction affine telle que : $g(2)=-7$ et $g(3)=4$

Le coefficient de la fonction affine g est $a=\dfrac{g(3)-g(2)}{3-2}=\dfrac{4+7}{3-2}=11$ et $b=g(2)-11\times2=-7-22=-29$

Alors $g(x) = 11x - 29$

3 - Représentation graphique d'une fonction affine

Proposition

- ★ Si une fonction est affine, alors sa représentation graphique est une droite
- ★ Réciproquement, si la représentation graphique d'une fonction est une droite, alors cette fonction est affine
- ★ La représentation graphique d'une fonction affine de coefficient nul, est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

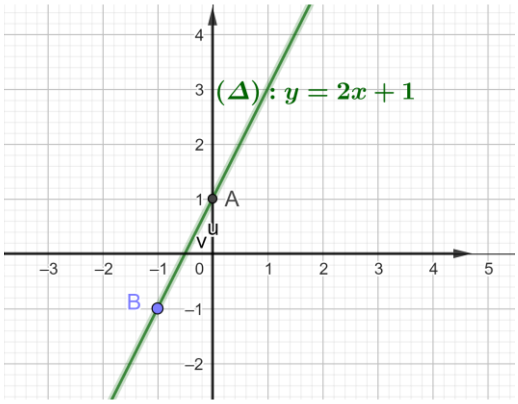
Exemples

1) Soit f la fonction affine définie par :

$$f : x \mapsto 2x+1 \; ou \; f(x) = 2x+1$$

Pour représenter cette fonction affine, on détermine

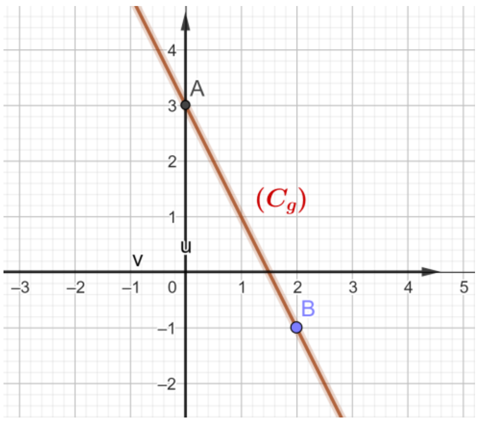
Deux points par qui elle va passer par les points :



	x	y
$A(0,1)$	0	1
$B(-1,-1)$	-1	-1

On place les points A et B puis on les relie pour obtenir la droite (AB). Et on a : la courbe représentative de la fonction affine f est la droite (AB).

2) Soit g la fonction affine dont la représentative est donnée



Dans la figure ci-contre. Posons $g(x) = ax + b$

On a La courbe (C_g) est la droite qui passe par les points

$A(0,3)$ et $B(2,-1)$. Donc $g(0) = 3$ et $g(2) = -1$

On a alors $a = \dfrac{g(2)-g(0)}{2-0} = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et

$b = g(2) - (-2)\times 2 = -1 + 4 = 3$.

Alors : $g(x) = -2x + 3$

3) Soit h la fonction affine telle que : $h(1) = 4 \; et \; h(3) = 8$.

a) Déterminer $h(x)$ en fonction de x

b) Calculer les images de -1, 0 et 5 par h

c) Déterminer les antécédents de 3, -6 et 1 par h

d) Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthonormé.