Exercice 1

Soit p un nombre premier tel que : $p \equiv 5[6]$ et $p > 3$.

On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation $(E) : x^3 + y^3 = p(1 + xy)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^{*2}$ une solution de l'équation (E), on pose $d = x \wedge y$, et soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $x = da$ et $y = db$

1) a) Justifier que $a \wedge b = 1$ *et* $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2ab)$.

b) En remarquant que $1 = (1 + d^2 ab) - d^2 ab$, montrer que $d^3 \wedge (1 + d^2 ab) = 1$.

c) Déduire que $d = 1$ et que $\begin{cases} a^3 + b^3 = p(1 + ab) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

2) Montrer que $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.

3) Montrer que $a^3 \equiv -b^3[p]$ et que $a^{p-1} \equiv b^{p-1}[p]$.

4) En déduire que $a \equiv -b[p]$ (on pourra écrire $p = 5 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$)

5) En posant $a + b = pu$ avec $u \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $u(a-b)^2 + (u-1)ab = 1$ et en déduire que $\begin{cases} a + b = p \\ |a - b| = 1 \end{cases}$.

6) Déduire dans $\mathbb{N}^{*2}$, l'ensemble des solutions de l'équation (E).

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM Smail El jaâfari

Exercice 2

On pose $I =]0, +\infty[$ et pour tout $(x,y) \in I^2 : x * y = e^{1+(1-\ln x)(1-\ln y)}$.

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I.

2) Montrer que la loi $*$ est associative et commutative dans I.

3) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε dans I que l'on déterminera.

4) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

5) Montrer que l'ensemble $H = \left\{ e^{1+2^n} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous-groupe de $(I, *)$.

6) Soit T la loi de composition interne définie dans $J =]1, +\infty[$ par : $(\forall (x,y) \in J^2), xTy = (x-1)(y-1) + 1$.

On considère l'application $\varphi : I \to J$

$$x \mapsto \ln x$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(I, *)$ dans (J, T).

b) En déduire que (J, T) est un groupe commutatif.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E_m) : z^2 - [1+(1+i)m]z + im^2 + m = 0$$

1) Vérifier que m est une solution de l'équation (E_m).

2) On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_m) telles que $z_1 = m$.

a) Déterminer z_2 et vérifier que $z_2 = iz_1 + 1$.

b) Dans le plan complexe, on note A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

Montrer que B est l'image de A par la rotation r dont on déterminera le centre et une mesure de son angle.

Partie 2

1) Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que : $|z| = |1+iz| \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \frac{1}{2}$.

b) Déduire que : $\begin{cases} |z| = |1+iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(z = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } z = e^{i\frac{5\pi}{6}} \right)$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant $(S) : \begin{cases} z^n(1+iz) = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que si z est une solution du système (S), alors $z \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}} \right\}$.

b) Vérifier que : $1 + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 + e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c) Déduire que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution du système (S) si et seulement si $n \equiv -2[12]$, et que $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ est une solution du système (S) si et seulement si $5n \equiv 2[12]$.

d) Justifier que : $5n \equiv 2[12] \Leftrightarrow n \equiv -2[12]$.

e) Déduire suivant les valeurs de l'entier naturel n l'ensemble des solutions du système (S).

Exercice 4

Partie 1

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail Eljaâfari

1) Vérifier que la fonction f est impaire et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Etudier les variations de la fonction f.

3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $J=]-1,1[$. (on note f^{-1} sa bijection réciproque)

4) Ecrire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

5) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}), f'(x)=1-f^2(x)$ et en déduire que : $(\forall x\geq 0), 0\leq f(x)\leq x$.

6) Justifier que : $(\forall x\geq 0), 0\leq 1-f'(x)\leq x^2$ et en déduire que : $(\forall x\geq 0), 0\leq x-f(x)\leq \dfrac{x^3}{3}$.

7) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$ et $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$.

a) Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}^*), u_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)}$ et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ln 2$.

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*), 0\leq u_n-S_n\leq \dfrac{1}{3n^2}$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

8) Construire dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la tangente (T) et les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

9) Soit $\lambda\in]0,1[$. On note S_λ l'aire en cm^2 du domaine plan

$$D_\lambda=\{M(x,y)/x\in[0,\lambda], y\in[0,\lambda]\ et\ f(x)\leq y\leq f^{-1}(x)\}$$

a) Montrer que la fonction $x\mapsto \ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $S_\lambda=\left(\lambda^2-2\ln\left(\dfrac{e^\lambda+e^{-\lambda}}{2}\right)\right)cm^2$

Partie 2

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\dfrac{f(t)}{t}dt; x\neq 0 \\ F(0)=0\end{cases}$

1) Montrer que F est une fonction impaire

2) Montrer que : $(\forall x>0); f(x)\times\int_x^{2x}\dfrac{1}{t}dt\leq F(x)\leq f(2x)\times\int_x^{2x}\dfrac{1}{t}dt$.

3) Déduire que $\lim_{x\to+\infty} F(x)=\ln 2$ et que F est continue en 0.

4) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $(\forall x>0); F'(x)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$.

5) a) En appliquant le théorème des accroissements finies deux fois de suite à la fonction F puis à la fonction f

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail Eljaâfari

montrer que : $(\forall x>0); 1-f^2(2x) \leq \dfrac{F(x)-F(0)}{x} \leq 1-f^2(x)$.

b) En déduire que F est dérivable en 0 et que $F'(0)=1$.

6) Dresser le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^+$.

Partie 3

On considère la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); I_n = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(t))^n \, dt$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) a) Vérifier que $\left(\forall t \in \left[0, \sqrt{3}\right]\right); 0 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq I_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln\left(\sqrt{3}\right)$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); I_{n+2} = I_n - \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4) Déduire que $(\forall p \in \mathbb{N}^*); \begin{cases} I_{2p} = I_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ I_{2p+1} = I_1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \end{cases}$.

5) On pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=2p} \frac{1}{k2^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM Smail Eljaâfari