Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction numérique f_n de la variable réelle x définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1-\ln x)^n ; si\, x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Partie 1

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé direct.

1) a) Montrer que la fonction f_n est continue à droite en zéro.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite en zéro.

c) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$.

2) a) Etudier les variations de la fonction f_1.

b) Etudier les variations de la fonction f_2.

3) a) Déterminer la position relative des deux courbes (C_1) et (C_2).

b) Construire les courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère. (on admet que le point $A(1,1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_2)).

Partie 2

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $]-\infty,0]$ par : $F(x) = \int_{e^x}^{1} \dfrac{f_1(t)}{1+t^2} dt$

1) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]-\infty,0[$, et que pour tout $x \in]-\infty,0[$ on a :

$$F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

b) En déduire les variations de la fonction F sur l'intervalle $]-\infty,0]$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0[$ on a : $\dfrac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \le F(x) \le \dfrac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt$.

b) Vérifier que la fonction $v : x \mapsto x^2\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{\ln x}{2}\right)$ est une primitive de la fonction f_1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_{e^x}^{1} f_1(t)dt = \dfrac{3}{4}$.

3) On suppose que la fonction F admet une limite finie L quand x tend vers $-\infty$. Prouver que $\dfrac{3}{8} \le L \le \dfrac{3}{4}$.

Partie 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \int_1^e f_n(x)dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

b) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $[1,e]$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq u_n$.

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n$.

b) En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1) et (C_2) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$.

b) Déterminer les limites éventuelles des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(nu_n)_{n\geq 1}$.

4) Soit a un nombre réel tel que $a \neq u_1$.

On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_1 = a$ et $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $d_n = |v_n - u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$

d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ diverge.

Exercice 2

Partie 1

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 17x - 11y = 2021$.

1) Montrer que si (x, y) est une solution de l'équation (E), alors $x \equiv 5[11]$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

Partie 2

Soit p un entier naturel tel que $p \geq 3$ et $p \neq 43$ et $p \neq 47$.

(on rappelle que $2021 = 43 \times 47$)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E_p) : 17x^{p-1} - 11y^{p-1} = 2021$.

1) Soit (x,y) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (E_p).

a) Montrer que pour tout entier a, on a : $a^{p-1}\equiv 0[p]$ ou $a^{p-1}\equiv 1[p]$.

b) Vérifier que p et 2021 sont premiers entre eux.

c) En déduire que : $x\wedge p=1$ ou $y\wedge p=1$.

d) Montrer que : $17x^{p-1}-11y^{p-1}\equiv -11[p]$ ou $17x^{p-1}-11y^{p-1}\equiv 6[p]$ ou $17x^{p-1}-11y^{p-1}\equiv 17[p]$.

2) Déduire que l'équation (E_{17}) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Exercice 3

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+,\times)$ est un anneau unitaire.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y&0\\y&x&0\\0&0&x+y\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1) a) Montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif.

b) Soit $M(x,y)\in E$, Ecrire $M(x,y)$ en fonction de I et J et calculer J^2.

2) a) Montrer que E est stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) a) Calculer $M(1,1)\times M(1,-1)$.

b) Est-ce que $(E,+,\times)$ est un corps. (justifier la réponse)

Exercice 4

Partie 1

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation

$$(E): z^2-(3a-2i)z+2a^2-4ai=0,\ où\ a\in\mathbb{C}$$

1) a) Montrer que $\Delta=(a+2i)^2$, où Δ est le discriminant de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans cette question on suppose que $a=1+i$. On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que $|z_1|<|z_2|$.

a) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique puis vérifier que $z_1^3+z_2=0$.

b) Déterminer sous forme algébrique les racines cubiques du nombre complexe z_2.

Partie 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points I, J et K d'affixes respectives $z_I = i$, $z_J = 2a$ et $z_K = a-2i$.

1) Montrer que les points I, J et K sont alignés si et seulement si $a \in i\mathbb{R}$.

2) On suppose que $a \notin i\mathbb{R}$.

Soit H le point à l'extérieur du triangle IJK tel que le triangle JKH est rectangle et isocèle en H.

a) Montrer que l'affixe du point H est : $z_H = \dfrac{(3-i)a+2-2i}{2}$ ou $z_H = \dfrac{(3+i)a-2-2i}{2}$.

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le quadrilatère $IJHK$ soit un carré.