Exercice 1

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 2013x-1962y=54$.

1) a) Déterminer $PGCD(2013,1962)$ et en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Sachant que le couple $(78,80)$ est une solution particulière de l'équation (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2) Montrer que si le couple (x,y) est une solution de l'équation (E), alors $x\equiv 0[6]$.

3) On pose $d=x\wedge y$ où (x,y) est une solution de l'équation (E).

Déterminer les valeurs possibles du nombre d.

4) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système $\begin{cases}671a-654b=18\\ a\wedge b=18\end{cases}$

Exercice 2

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire. Soit $G=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}1&0\\a&b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\right\}$.

Partie 1

1) Montrer que G est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

2) Montrer que $(G,\times)$ est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?

3) Soit H l'ensemble des matrices $M(a,b)$ de G telles que $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que H est un sous-groupe de $(G,\times)$.*

4) Soit A un élément de G tel que $A=\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}$ où $a\in\mathbb{R}$.

On pose : $A^1=A,\ A^2=A\times A,\ A^3=A^2\times A,\ldots,\ A^{n+1}=A^n\times A$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Donner l'expression de A^n en fonction de a et de n.

Partie 2

Pour tout (a,b) et (x,y) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on définit la loi de composition interne T par : $(a,b)T(x,y)=(a+bx,by)$.

Soit l'application φ : $\begin{array}{rcl} G & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \\ M(a,b) & \mapsto & (a,b)\end{array}$

1) Montrer que φ est un morphisme bijectif de $(G,\times)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T)$.

2) En déduire la structure algébrique de $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T)$.

3) Pour tout $a\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer le symétrique de $\underbrace{(a,1)T(a,1)T\ldots T(a,1)}_{n\ fois}$ dans $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T)$

Exercice 3

Soit a un nombre complexe non nul.

I - On considère, dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2+\left[(1-a)i-a\right]z+a+a^2i=0$

1/ Développer le nombre complexe : $\left[(1+a)i-a\right]^2$

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

3/ Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $a=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

II - On suppose que $a\neq -1,\ a\neq -i\ et\ a\neq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et on considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives a, ai, $a-i$ et $-i$.

1/ Montrer que les points $A, B\ et\ C$ sont alignés si et seulement si on a : $\arg(a)\equiv\frac{3\pi}{4}[\pi]$.

2/ On suppose que $a=e^{i\theta}$ où $\theta\in]-\pi;\pi[$ et $\theta\neq\frac{3\pi}{4}$ et $\theta\neq-\frac{\pi}{2}$

a/ Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe $1+a$.

B /Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$.

3/ On pose dans cette question : $a=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et on considère la rotation R de centre D et qui transforme C en B.

a/ Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R.

b/ Donner l'écriture complexe de la rotation R.

C/ Déterminer l'affixe ω du point Ω l'image du point A par la rotation R.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(1+x^2)e^{-x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie 1

1) Etudier les deux branches infinies de la courbe (C_f) aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}$, puis dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=(x^2-4x+3)e^{-x}$, étudier la concavité de la courbe (C_f).

4) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (l'unité est 1 cm)

5) a) Vérifier que f est une solution particulière de l'équation différentielle $(E): y''+2y'+y=2e^{-x}$.

b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).

6) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Partie 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0=\frac{1}{3}\ln 2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha\in\left]\frac{\ln 2}{3},1\right[$.

2) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ \frac{1}{3}\ln 2\leq u_n\leq 1.$

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}),\ e^{-x}\geq 1-x$ et $\left(\forall x\in\left[\frac{\ln 2}{3},1\right]\right),|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

__Partie 3__

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites numériques définies par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*): a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\ \text{ et }\ b_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]^2$$

1) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $c_n=\prod_{k=1}^{n}\left[1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$.

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+),\ x-\frac{1}{2}x^2\leq\ln(1+x)\leq x$.

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ a_n-\frac{1}{2}b_n\leq\ln(c_n)\leq a_n$

c) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5

Soit F la fonction numérique définie par : $F(x)=\int_x^{4x}\frac{\ln t}{2t-1}dt$

1) Montrer que F est définie sur $D=\left]0,\frac{1}{8}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

2) Montrer que F est dérivable sur D et calculer $F'(x)$ pour tout x de D.

3) Soit $x\in]1,+\infty[$.

a) Montrer que : $(\exists c\in[x,4x]): F(x)=\frac{3x\ln c}{2c-1}$

b) Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

4) Soit $x\in\left]0,\frac{1}{16}\right[$. Montrer que $|F(x)|\leq-\int_x^{4x}2\ln t.dt$ puis déduire $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$.