Exercice 1

Dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E): z^3-(2+3i)z^2+(4i-1)z+2-i=0.$$

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les ponts d'affixes respectives $1, i$ et $2+i$. A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tels que $z'=\frac{1}{z^2}$ où $z\in\mathbb{C}-\{-1,0,1\}$.

a) Montrer que le triangle AMM' est rectangle en A si et seulement si $\frac{z+1}{z^2}\in\mathbb{R}^*$.

b) On pose : $z=e^{i\theta}$ où $\theta\in\left]0,\pi\right[$. Donner la forme trigonométrique de $\frac{z+1}{z^2}$.

c) Déduire les valeurs de θ pour lesquelles le triangle AMM' soit rectangle en A.

3) Soit N le point d'affixe $z_N=\frac{(1+i)z}{z-i}$ où $z\in\mathbb{C}-\{i\}$.

a) Montrer que $N\in\mathscr{C}(O,1)$ si et seulement si M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$. (On note par $\mathscr{C}(O,1)$ le cercle de centre O et de rayon 1)

b) Montrer que : $\overline{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})}\equiv\frac{\pi}{4}-\overline{(\vec{u},\overrightarrow{BM})}[2\pi]$.

c) En déduire l'ensemble des points M pour lesquels les points O, M et N soient alignés.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{Z}$, le système $(S):\begin{cases}n\equiv 13[19]\\ n\equiv 6\ [12]\end{cases}$

1) Démontrer qu'il existe un couple (u,v) d'entiers relatifs tels que : $19u+12v=1$. (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que pour un tel couple, le nombre $N=13\times12v+6\times19u$ est une solution de (S).

2) a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases}n\equiv n_0[19]\\ n\equiv n_0[12]\end{cases}$.

b) Montrer que le système $\begin{cases}n\equiv n_0[19]\\ n\equiv n_0[12]\end{cases}$ équivaut à $n\equiv n_0[12\times19]$.

(on rappelle que $a\equiv b[c]\Leftrightarrow c/(a-b)$)

3) a) Trouver un couple (u,v) solution de l'équation $19u+12v=1$ et calculer la valeur de n correspondante.

b) Déterminer l'ensemble des solutions du système (S). (on pourra utiliser la question 2)b)).

4) Soit n une solution du système (S). Déterminer le reste de la division euclidienne de n par $228=12\times19$.

Exercice 3

On rappelle que $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ sont deux anneaux.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ et pour tout a et b de $\mathcal{E}$, on pose : $a*b=a+b-3ab$.

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{E}$.

2) Montrer que $(\mathcal{E},*)$ est un groupe commutatif.

3) Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel a tel que $a \neq \frac{1}{3}$, on pose : $a^{(n)} = \underbrace{a*a*...*a}_{n\ fois\ a}$.

Montrer que : $a^{(n)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n$.

4) Pour tout réel a, on considère la matrice : $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que : $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2),\ M(a) \times M(b) = M(a*b)$.

b) On considère l'ensemble $G = \{M(a) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / a \in \mathcal{E}\}$ et l'application : $\varphi : \mathcal{E} \to G$
$a \mapsto M(a)$

Montrer que φ est un morphisme bijectif de $(\mathcal{E},*)$ vers $(G,\times)$.

c) Déduire la structure de $(G,\times)$ puis déterminer $M^{-1}(a)$ la matrice inverse de $M(a)$.

d) Déterminer $M^n(a)$ pour tout $n\ de\ \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x\ln^n(x),\ si\ x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (unité : 2 cm)

Partie A

1) a) Montrer que la fonction f_n est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.

c) Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x > 0$.

2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n. On distinguera deux cas suivant la parité de n.

b) Montrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_n)$ passent par trois points fixes : l'origine du repère et deux autres points A et B tels que $0 < x_A < x_B$.

3) a) Etudier la position relative de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ et construire ces deux courbes dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1\ et\ x = e$

Partie B

On pose : $F_n(\alpha) = \int_\alpha^1 f_n(x)dx$ où $n \in \mathbb{N}^*\ et\ \alpha \in]0,1[$.

1) a) Sans calculer $F_n(\alpha)$, prouver que $F_n(\alpha)$ admet une limite finie u_n lorsque α tend vers 0^+.

b) Calculer $F_1(\alpha)$ et en déduire que $u_1 = -\frac{1}{4}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall \alpha \in]0,1[)(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ F_{n+1}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}\ln^{n+1}(\alpha) - \frac{n+1}{2}F_n(\alpha)$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2}u_n$.

3) Soit $\mathscr{A}_n$, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_n)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0 \ et \ x = 1$.

a) Montrer que : $\mathscr{A}_n = 4|u_n| cm^2$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $\mathscr{A}_n = \dfrac{n!}{2^{n-1}}$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $\mathscr{A}_{n+1} \geq 2\mathscr{A}_n$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n$.

Partie C

On pose $G(x) = \int_1^{e^x} t\ln(t)\,dt$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1) a) Sans calculer $G(x)$, montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de G.

2) a) Calculer $G(x)$ en fonction de x.

b) Dresser le tableau de variation de G.