Exercice 1

Une personne a ouvert un compte bancaire avec un montant de 30 000 dirhams le premier janvier 2024.

On note u_n la valeur du capital de cette personne sur ce compta au premier janvier de l'année $(2024+n)$.

D'une année à l'autre, la banque fait bénéficier ce client d'une augmentation de 5% , puis lui retire 500 dirhams.

1) Expliquer pourquoi on a : $u_0 = 30000$ et $u_{n+1} = 1{,}05u_n - 500$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = u_n - 10000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer u_1 et v_0.

b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}05$.

c) Exprimer v_n en fonction de n.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10^4\left(2(1{,}05)^n + 1\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) a) Interpréter u_1 dans le contexte de l'exercice.

b) A partir de quelle année le capital de cette personne sur le compte bancaire dépassera-t-il 50 000 dirhams ?

Exercice 2

Une urne U_1 contient deux jetons portant le numéro 1, et quatre jetons portant le numéro 2. (tous les jetons sont indiscernables au toucher).

Une urne U_2 contient trois boules rouges et quatre boules vertes. (toutes les boules sont indiscernables au toucher)

1) On tire au hasard un jeton de l'urne U_1.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « le jeton tiré porte le numéro 1 »

B : « le jeton tiré porte le numéro 2 »

2) Dans cette question, on considère l'expérience suivante :

On tire un jeton de l'urne U_1 et on marque son numéro :

* Si le numéro tiré est 1, on tire une seule boule de l'urne U_2

* Si le numéro tiré est 2, on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_2.

On note E_n l'événement : « tirer exactement n boules rouges » où $n \in \{0,1,2\}$.

a) Montrer que $p(E_1) = \dfrac{11}{21}$ et $p(E_2) = \dfrac{2}{21}$.

b) Calculer la probabilité de l'événement A sachant que l'événement E_1 est réalisé.

Exercice 3

Partie 1

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=x-\ln x$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g, et calculer les limites de g aux bornes de D_g.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in D_g$, et étudier les variations de la fonction g.

3) En déduire que pour tout $x\in D_g$, $\ln x<x$.

Partie 2

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}; si\, x>0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer D_f, le domaine de définition de la fonction f.

2) a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter ce résultat géométriquement.

4) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f-\{0\}$ et étudier les variations de la fonction f.

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α telle que $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

6 Construire la courbe (C_f). (on prend : $e\simeq 2{,}7$ et $f(2)\simeq 0{,}7$)