Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{4}{3}$ et $u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{1+u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1) a) Montrer par récurrence que : $(n\in\mathbb{N}),\ 1<u_n<2$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire que : $(n\in\mathbb{N}),\ \dfrac{4}{3}\leq u_n$

2) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n=\dfrac{u_n}{2-u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Déterminer v_n en fonction de n, et montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ u_n=\dfrac{4\times 3^n}{2\times 3^n+1}$

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

3) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ 2-u_n=\dfrac{2}{2\times 3^n+1}$ et en déduire que :

$$10^{-3}-(2-u_n)=\frac{2\times 3^n-1999}{10^3\left(2\times 3^n+1\right)}$$

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $2-u_n<10^{-3}$

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(-3,0,0);\ B(1,-2,0)\ et\ C(-1,0,-1)$

1) a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que $x+2y+2z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S) la sphère de centre le point $\Omega(1,0,1)$ et qui est tangente au plan (ABC)

a) Déterminer le rayon de la sphère (S)

b) Montrer que l'équation cartésienne de la sphère (S) est : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-2=0$

c) Déterminer l'intersection de la droite (AC) et la sphère (S).

Exercice 3

Une urne contient 9 jetons : 4 jetons blancs, 3 jetons rouges et 2 jetons verts. Les jetons sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément 3 jetons de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « aucun jeton blanc n'est tiré »

B : « Les jetons tirés sont de la même couleur »

1) a) Calculer $p(\mathrm{A})$ et $p(\mathrm{B})$

b) Calculer $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons blancs restés dans l'urne

a) Déterminer les valeurs prises par X

b) Montrer que $p(X=3)=\frac{10}{21}$

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

d) Calculer l'espérance mathématique de X

Exercice 4

I - On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z)=z^3-13z^2+73z-61=0$$

1) Vérifier que 1 est une racine de $P(z)$

2) Déterminer les deux réels a et b tel que $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$ pour tout $z\in\mathbb{C}$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$

II - Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points

A, B, C et D d'affixes respectives $a=1,\ b=6-5i,\ c=6+5i\ \ et\ \ d=6+15i$

1) Montrer que les points B, C et D sont alignés et que $BD=2CD$

2) Vérifier que $\dfrac{b-a}{c-a}=-i$; puis en déduire que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires

3) En déduire la nature du triangle ABC

III - 1) Soit R la rotation de centre A et qui transforme B en C.

Montrer qu'une mesure de l'angle de la rotation R est $\dfrac{\pi}{2}$

2) Déterminer e l'affixe du point E l'image du point D par la rotation R

IV - Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $k = 2$

1) Montrer que l'expression complexe de h est : $z' = 2z - 1$

2) Déterminer f l'affixe du point F l'image du point B par l'homothétie h

Exercice 5

Partie I :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = e^x + 2lnx$

1) a) Calculer $\lim_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

c) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations

2) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$ et que $\frac{1}{4} < \propto < \frac{1}{2}$

b) Démontrer que : $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0, \propto]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[\propto, +\infty[$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = e^x + 2xlnx - 2x \, ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité graphique : 4cm)

1) a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus

2) a) Montrer que f est continue en 0 à droite

b) Calculer $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

b) Etudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations

4) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ (on prend : $\propto \approx 0{,}45$ et on admet que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des

Abscisses en deux points d'abscisse 0,3 et 0,6)

5) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^2 xlnx = 2ln2 - \frac{3}{4}$

b) Calculer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses

et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$