Exercice 1

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E): z^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)z+16=0.$$

a) Vérifier que le déterminant de l'équation (E) est : $\Delta=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

b) En déduire les solutions de l'équation (E).

2) On considère les nombres complexes : $a=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $b=1+i\sqrt{3}$ et $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

a) Vérifier que : $b\overline{c}=a$ puis en déduire que $ac=4b$.

b) Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique.

c) En déduire que : $a=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par B, C et D les points d'affixes respectives b, c et d telle que $d=a^4$. Soient z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

a) Vérifier que $z'=\frac{1}{4}az$.

b) Déterminer c' l'affixe du point C' l'image de C par la rotation R.

c) Montrer que $a^4=128b$, puis déduire que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,1,1)$, $B(2,3,0)$, $C(2,2,-1)$ et $D(1,2,3)$.

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, puis déduire l'aire du triangle ABC.

b) Montrer que $3x-y+z-3=0$ est une équation du plan (ABC).

c) Soit (Δ) la droite passant par le point D et perpendiculaire au plan (ABC). Déterminer le triplet de coordonnées du point H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

2) Soit (S) la sphère d'équation cartésienne : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$.

a) Montrer que le point D est le centre de la sphère (S) et que son rayon est $R=3$.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

c) Déterminer les équations cartésiennes des plans (P) et (P') parallèles au plan (ABC) et tangents à la sphère (S).

Exercice 3

Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher : 2 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules vertes.

On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne.

1) On considère les événements :

A : « les deux boules tirées sont de même couleur »

B : « Parmi les boules tirées, il y a au moins une boule de couleur rouge »

a) Montrer que $p(A)=\frac{5}{21}$.

b) Calculer $p(B)$.

c) Montrer que $p(A\cap B)=\frac{1}{7}$ puis déduire $p_A(B)$.

d) Les événements A et B sont-ils indépendants ? (justifier la réponse)

2) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules rouges tirées de l'urne.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice 4

Partie 1

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x+e^{-x}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

2) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x)=\frac{e^x-1}{e^x}$.

b) Dresser le tableau de variations de g.

c) Déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x)\geq 1$.

3) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $1+xe^x>0$.

Partie 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\ln(1+xe^x)$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $D_f = \mathbb{R}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) Vérifier que : $(\forall x \in]0,+\infty[)$, $f(x) = x + \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x e^x}\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Déduire la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{(1+x)e^x}{1+x e^x}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) - x = \ln[g(x)]$.

b) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite $(\Delta): y = x$.

5) a) Montrer que la droite (Δ) est la tangente à la courbe (C_f) au point $O(0,0)$.

b) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (on prendra $f(-1) \simeq -0,5$).

Partie 3

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = -1$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $-1 \le u_n < 0$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.