Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1.

2) a) Vérifier que : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{3(u_n - 2)}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 2$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 2)^2}{u_n + 1}$.

b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle est convergente.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $r = \dfrac{1}{3}$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{n+3}{3}$ et $u_n = \dfrac{2n+9}{n+3}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $u_n - 2 < 0{,}001482$.

Exercice 2

Une urne contient quatre boules blanches numérotées 1 – 2 – 2 – 2 et six boules rouges numérotées 0 – 0 – 0 – 2 – 2 – 2. (Toutes les boules sont indiscernables au toucher).

1) On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « les trois boules tirées sont de même couleur »

B : « les trois boules tirées portent le même numéro »

C : « le produit des numéros des trois boules tirées est nul »

D : « les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même numéro »

a) Calculer les probabilités : $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$

b) Les deux événements A et B sont-ils indépendants ?

c) Exprimer l'événement D en fonction de deux événements parmi A, B ou C ; puis montrer que $p(C)=\frac{1}{40}$

d) Sachant que les boules tirées sont de même couleur, calculer la probabilité qu'elles portent le même numéro.

2) On considère l'expérience suivante : On tire une boule de l'urne, si elle est blanche on la met de côté et on tire successivement avec remise deux boules de l'urne ; mais si la boule tirée est rouge , on la remet dans l'urne et on tire successivement sans remise deux d'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges et une boule blanches.

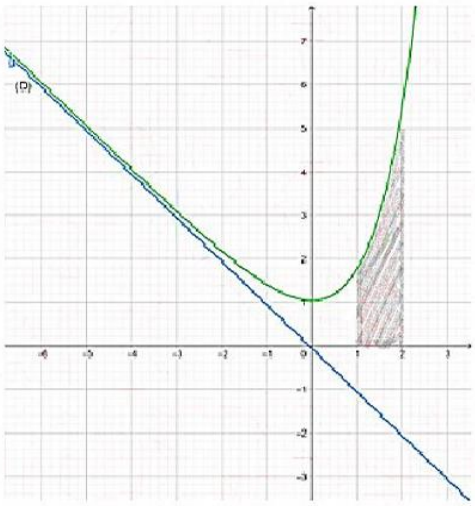
Exercice 3

Partie 1

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par

Sa courbe (C_g) ci-contre dans un repère orthonormé

$(O;\vec{i},\vec{j})$ et la droite (D) d'équation : $y=-x$



1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x),\ \lim_{x\to+\infty} g(x),\ \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}\ et\ \lim_{x\to-\infty}[g(x)+x]$$

2) Dresser le tableau de variations de g .

3) Déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x)\geq 0$.

4) On suppose que $g(x)=e^x-x$. Calculer l'aire de la partie hachurée dans la figure.

Partie 2

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4e^x-2x^2-1$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=4g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4) Calculer $f''(x)$ et déterminer le point d'inflexion de la courbe (C_f)

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1,0[$.

6) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.