## Exercice 1

Soient a, b, d, n et m des entiers relatifs. Montrer que :

- Si $d \mid 2n+m$ et $d \mid n+m$ alors $d \mid m$
- Si $d \mid 2n+5m$ et $d \mid n+2m$ alors $d \mid m$
- Si $d \mid n-m$ *et* $d \mid a-b$, *alors* $d \mid na-mb$
- Si $d \mid 5n+4$ et $d \mid 3n-1$, alors $d \mid 17$
- Si $d \mid 2n^2+3$ et $d \mid n-2$ , alors $d \mid 11$

## Exercice 2

1) Déterminer les valeurs possibles de l'entier relatif n tel que :

- $n+2 \mid n+15$
- $n-4 \mid 3n-17$
- $\dfrac{3n^2+15n+19}{n+1} \in \mathbb{N}$

2) Déterminer les entiers relatifs $n$ qui vérifient :

$a)\ n^2+n=20$ ; $b)\ n^2+2n=35$ ; $c)\ (n+2)(n-1)=14$ ;

3) Soients $x$ et $y$ deux entiers naturels. Montrer que $2x+3y \equiv 0[7] \Leftrightarrow 5x+4y \equiv 0[7]$

4) Soients $x$ et $y$ deux entiers naturels tels que : $xy-5x-5y-7=0$

a) Montrer que : $xy-5x-5y-7=0 \Leftrightarrow (x-5)(y-5)=32$

b) Déterminer les entiers naturels $x$ et $y$ tels que $xy-5x-5y-7=0$.

## Exercice 3

1) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a :

a) ) Le nombre A défini par A $=3^{2n+1}+2^{n+2}$ set divisible par 7.

b) Le nombre B défini par B $=3^{n+3}-4^{4n+2}$ set divisible par 11.

c) le nombre C défini par C $=3^{2n}+2^{6n-5}$ est divisible par 11

2) Soit $x$ un entier relatif .

a) Démontrer que : $3x \equiv 8[10] \Leftrightarrow x \equiv 6[10]$.

b) Démontrer que : $x^2 \equiv 6[10] \Leftrightarrow (x \equiv 4[10]\ ou\ x \equiv 6[10])$

3) Soit $n$ un entier naturel.

a) Démontrer que : $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6[10]$

b) En déduire les entiers naturels multiples de 10 et inférieurs à 5000qui sont la somme des carrés de trois entiers consécutifs.

## Exercice 4

1) Démontrer que $3^5 \equiv 1[11]$ puis en déduire que pour tout couple d'entiers naturels $(k,r)$, on a : $3^{5k+r} \equiv 3^r[11]$

2) Soit $n$ un entier naturel. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de $3^n$ par $11$ ?

3) Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles on a : $3^n+7 \equiv 0[11]$ ?

4) Déterminer le reste de la division euclidienne de $322^{448}$ par 11.

## Exercice 5

1) Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 de 25 et $139^{44}$.

2) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division euclidienne de $5^n$ par $13$.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2020^{2014}$ par $13$.

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ 13 / 31^{4n+1}+18^{4n-1}$

## Exercice 6

Soit $n$ un entier naturel tel que : $n>1$.

1) On pose $A_n = n-1$ *et* $B_n = n^2-3n+6$.

a) Déterminer deux entiers relatifs $a$ et $b$ tels que pour tout entier $n$, on ait : $B_n=(an+b)(n-1)+4$.

b) En déduire que $PGCD(A_n, B_n) = PGCD(A_n, 4)$

2) Donner suivant les valeurs de $n$ le $PGCD(A_n,4)$.

3) Pour quelles valeurs de $n$, le nombre $F_n$ défini par : $F_n = \dfrac{(2n-1)B_n}{A_n}$ est un entier ?

## Exercice 7

1) Soit $p$ un nombre premier tel que $p \geq 3$.

a) Montrer que : $p \equiv 1[4]$ ou $p \equiv 3[4]$

b) Montrer que : $p^2 \equiv 1[8]$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a(n) = 2^n+4^n+8^n$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $a(n) \equiv a(r_n)[7]$ où $r_n$ est le reste de la division euclidienne de $n$ par $3$.

c) Déduire les valeurs de $n$ pour lesquelles on a : $a(n) \equiv 0[7]$.

## Exercice 8

1) Vérifier que : $10^3-1 = 9\times 111$ *et* $10^3+1 = 7\times 11\times 13$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose : $A_n = 10^{9n}+2\times 10^{6n}+2\times 10^{3n}+1$.

a) Déterminer le reste de la division du nombre $A_n$ par 111.

b) Montrer que si $n$ est impair alors $A_n$ est divisible par 7, 11 et 13.

3) On suppose que $n$ est pair.

a) Montrer que $(A_n-6)$ est divisible par 7, 11 et 13

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de $A_n$ par $111\times 1001$.

## Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer suivant les valeurs de $n$ les restes de la division euclidienne de $5^n$ par $8$.

2) On pose : $A_n = 124^{4n+1} + (4n+1)^{124}$.

a) Vérifier que $124 \equiv 4[8]$ puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $8/124^{4n}$.

b) Montrer que si $n$ est pair, alors $A_n \equiv 1[8]$.

3) En utilisant la question 1) montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, $8/(A_n-1)$.

## Exercice 10

Soit N l'entier naturel écrit dans le système de numération décimal par : $N = \underbrace{111\ldots11}_{2010\text{ fois } 1}$

1/Montrer que N est divisible par 11

2/a/Justifier que 2011 est premier et que $10^{2010}-1=9N$

b/Montrer que 2011 divise 9N

c/En déduire que 2011 divise N

3/Montrer que le nombre N est divisible par 22121

## Exercice 11

Soit p un entier naturel premier tel que $p \geq 3$ et $A_p = \{1; 2; 3; 4; ...; p-1\}$ et soit $a \in A_p$

1/a/Justifier que $a^{p-2}$ est une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$

dans $\mathbb{N}$

b/Soit r le reste de la division euclidienne de $a^{p-2}$ par p. Montrer

que r est l'unique solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$ dans $A_p$

2/Résoudre dans $A_{29}$ les équations $2x \equiv 1[29]$ et $3x \equiv 1[29]$

3/Démontrer que : $\forall(x; y) \in \mathbb{N}^2;\ xy \equiv 0[p] \Leftrightarrow x \equiv 0[p] ou\ y \equiv 0[p]$

4/Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[29]$