المادة	الرياضيـــــــــــــــــات	مدة الإنجاز	4 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

CONSIGNES :

- ✓ La durée de l'épreuve est de 4 heures
- ✓ L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux
- ✓ Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat

Exercice 1	L'analyse	10 points
Exercice 2	Les nombres complexes	3,5 points
Exercice 3	Les structures algébriques	3,5 points
Exercice 4	L'arithmétique	3 points

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 : (10 points)

0,25 A-1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ 1+x\leq e^{x}$

0,25 2) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right);\ 0\leq 1-e^{-x}\leq x$

0,5 b) En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right);\ 0\leq 1-x+\dfrac{x^{2}}{2}-e^{-x}\leq\dfrac{x^{3}}{6}$

0,5 c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{1-x-e^{-x}}{x^{2}}=-\dfrac{1}{2}$

B - On considère la fonction définie sur $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=1\ et\ (\forall x\in]0;+\infty[);\ f(x)=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,5 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0

0,25 b) Vérifier que : $(\forall x>0);\ \dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1-2x-e^{-2x}}{x^{2}}-\dfrac{1-x-e^{-x}}{x^{2}}$

0,5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que le nombre dérivé à droite en 0

est $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

0,5 2) a) Montrer que : $(\forall x>0);\ f'(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^{2}}\left(2x+1-e^{x}(1+x)\right)$

0,5 b) Montrer que : $(\forall x>0);\ f'(x)\leq -e^{-2x}$ (On pourra utiliser : $1+x\leq e^{x}$)

0,25 c) En déduire le sens de variations de f sur I

3) On admet que : $(\forall x>0);\ f''(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^{3}}-\left(4x^{2}-4x-2+e^{x}\left(2+2x+x^{2}\right)\right)$

0,25 a) Montrer que : $(\forall x\geq 0);\ 1+x+\dfrac{x^{2}}{2}\leq e^{x}$

0,5 b) En déduire que : $(\forall x>0);\ f''(x)>0$

4) On admet que : $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f'(x)=-\dfrac{3}{2}$

0,5 a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

0,5 b) En déduire que : $(\forall x\in I);\ |f'(x)|\leq\dfrac{3}{2}$

0,5	5) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu
0,25	b) Dresser le tableau de variations de f
0,25	c) Déterminer la position relative de la courbe (C) par rapport à sa demi-tangente au point $T(0;1)$
0,5	d) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
	C- 1) Pour tout x de $[0;1]$, on pose : $g(x)=f(x)-x$
0,5	a) Montrer que g est une bijection de $[0;1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera
0,5	b) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in]0;1[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$
	2) Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k\in\{0,1,\dots,n\}$ on considère les nombres réels $x_k=\dfrac{k\alpha}{n}$ et on pose : $I_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$ et $J_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt$
0,5	a) Montrer que : $(\forall k\in\{0,1,\dots,n\});\ \lvert J_k-I_k\rvert\le\dfrac{3}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(t-x_k)dt$
0,5	b) En déduire que : $(\forall k\in\{0,1,\dots,n\});\ \lvert J_k-I_k\rvert\le\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2$
	3) On pose : $L=\int_0^{\alpha} f(t)dt$
0,5	a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ \left\lvert\dfrac{\alpha}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right)-L\right\rvert\le\dfrac{3}{4}\dfrac{\alpha^2}{n}$
0,25	b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right)=\int_0^{\alpha} f(t)dt$

Exercice 2 :(3,5 points)

Soit $m\in\mathbb{C}\setminus\{-1;0;1\}$

I - On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_n) d'inconnue z

$$(E_n):\ m z^2-(m-1)^2 z-(m-1)^2=0$$

0,25	1) a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_n) est : $\Delta=(m^2-1)^2$
0,5	b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_n).
0,5	2) On prend uniquement dans cette question $m=e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$

Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

II – Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $m-1$ et $\frac{1}{m}-1$

0,5 1) Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$

2) On suppose que m n'est pas un nombre réel.

Soient C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$

0,5 a) Montrer que l'affixe du point C est : $c = m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que l'affixe du point D est : $d=(m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

0,5 b) Montrer que : $2(p-r)=m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)$ et $2(q-r)=(m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}-\left(\frac{1}{m}-m\right)$

0,25 c) Montrer que : $q-r=e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$

0,5 d) Quelle est la nature du triangle PQR ? (justifier votre réponse)

Exercice 3 :(3,5 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre

D'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (la loi $\times$ étant la multiplication usuelle des matrices)

Pour tout a on pose $M(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a+1&3&-1\\2a+3&6&-2\end{pmatrix}$ et soit $G=\{M(a)/a\in\mathbb{R}\}$

1) Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall a\in\mathbb{R});\ \varphi(a)=M(a)$

0,5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

0,5 b) Montrer que $\varphi(\mathbb{R})=G$, en déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif

0,5	c) Déterminer J l'élément neutre dans $(G,\times)$
0,5	d) Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G,\times)$.
0,5	e) Résoudre dans $(G,\times)$ l'équation : $M(1)\times X = M(2)$
0,25	2) a) Montrer que : $(\forall a\in\mathbb{R});\ M(a)\times J = M(a)\times I$
0,5	b) En déduire que pour tout $a\in\mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$
0,25	c) Vérifier que les matrices de la forme $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+2&3&0\\3x+5&6&1\end{pmatrix}$ avec $x\in\mathbb{R}$, sont des solutions dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$ de l'équation : $M(1)\times X = M(2)$

	Exercice 4 :(3 points)
0,5	1) Montrer que 137 est un nombre premier
0,5	2) Déterminer un couple $(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ *tel que* $:38u+136v=2$
	3) Soit $x\in\mathbb{Z}$ tel que : $x^{38}\equiv 1[137]$
0,5	a) Montrer que x et 137 sont premiers entre eux
0,5	b) Montrer que : $x^{136}\equiv 1[137]$
0,5	c) Montrer que : $x^{2}\equiv 1[137]$
0,5	4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E): x^{19}\equiv 1[137]$

FIN