المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2021

-الموضوع-

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | RS 24F

المادة	الرياضيــــــــــــــــات	مدة الإنجاز	4 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

CONSIGNES :

- ✓ La durée de l'épreuve est de 4 heures
- ✓ L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux
- ✓ Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat

Exercice 1	L'analyse	8 points
Exercice 2	L'analyse	4 points
Exercice 3	Les nombres complexes	4 points
Exercice 4	L'arithmétique	4 points

- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
- L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 : (10 points)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=]-\infty;1[$ par : $f(x)=\ln(1-x)$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,25 1) a) Montrer que la fonction f est continue sur I

0,25 b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I

0,75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

0,5 d) Interpréter graphiquement les résultats obtenus

0,25 e) Donner le tableau de variations de f

0,25 2) a) Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ est concave

0,25 b) Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,25 3) a) Montrer que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$

On note f^{-1} sa bijection réciproque

0,25 b) Déterminer $f^{-1}(x)$ $pour\ tout$ $x\in\mathbb{R}$

0,25 c) Vérifier que : $f^{-1}(-1)=1-e^{-1}$

Partie II :

Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose : $P_n(x)=x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n}$

0,5 1) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, il existe un unique réel $x_n\in]0;1[$ tel que $P_n(x_n)=1$

0,5 2) Déterminer le réel $\alpha=x_2$ et vérifier que : $0<\alpha<1$

0,5 3) a) Montrer que : pour tout entier $n\geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n)>1$

0,5 b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante

0,25 c) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, on a : $x_n\in]0;\alpha[$

0,25 d) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente

4) Pour tout $x\in I$ et pour tout entier $n\geq 2$, on pose : $f_n(x)=f(x)+P_n(x)$

0,5 a) Montrer que : $(\forall x\in I)(\forall n\geq 2);\ f'(x)=-\dfrac{x^n}{1-x}$

0,25 b) Montrer que : $(\forall x\in[0;\alpha])(\forall n\geq 2);\ |f_n'(x)|\leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 c) En déduire que : $(\forall x\in[0;\alpha])(\forall n\geq 2);\ |f_n(x)|\leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 d) Montrer que : $(\forall n\geq 2);\ |f(x_n)+1|\leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 e) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Exercice 2 :(3,5 points)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}}dt$

0,5 1) a) Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1 b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

0,5 2) a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1(1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}dx$$

0,5 b) Calculer $\int_0^1 F(x)dx$

3) On considère la suite $(u_n)_{n\geq1}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}}dx\right)$$

0,5 a) Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\dfrac{k+1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\dfrac{k}{n}\right)$

0,5 b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}F\left(\dfrac{k}{n}\right)$

0,5 c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice 3 :(4 points)

m est un nombre complexe différent de 2 et de $-i$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E):\ z^2-(m-i)z-im=0$$

1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(m+i)^2$

b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E)

0,75 c) Sachant que $m=e^{i\frac{\pi}{8}}$, écrire le nombre complexe z_1+z_2 sous forme exponentielle

2) On considère les points A, B et M d'affixes respectives 2, $-i$ et m et soit M' le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire

0,5 a) Déterminer en fonction de m l'affixe de M'

0,75 b) Déterminer en fonction de m l'affixe du point N tel que le quadrilatère $ANM'B$ soit un parallélogramme

1 c) Montrer que les deux droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires si, et seulement si $\operatorname{Re}((2-i)m)=\operatorname{Re}(m^2)$.

Exercice 4 :(4 points)

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2, soit $A=1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$ et soit p un nombre premier impair tel que : p *divise* A

1 1) a) Montrer que $a^7\equiv 1[p]$ et en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ a^{7n}\equiv 1[p]$

1 b) Montrer que a et p sont premiers entre eux et en déduire que : $(\forall m\in\mathbb{N});\ a^{(p-1)m}\equiv 1[p]$

2) On suppose que 7 ne divise pas $p-1$

0,5 a) Montrer que : $a\equiv 1[p]$

0,5 b) En déduire que : $p=7$

1 3) Montrer que si p est un nombre premier impair tel que p divise A, alors $p=7$ *ou* $p\equiv 1[7]$

FIN