المادة	الرياضيـــــــــــــــات	مدة الإنجاز	4 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

CONSIGNES :

- ✓ L'utilisation de la calculatrice est strictement interdite
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices suivant l'ordre qui lui convient
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter
- ✓ Le candidat doit traiter EXERCICE 3 et EXERCICE 4 et choisir de traiter EXERCICE 1 ou bien EXERCICE 2
- ✓ Le candidat doit traiter au total TROIS exercices

Composantes du sujet

L'épreuve es composée de quatre exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Arithmétique	3,5 points
Exercice 2	Structures algébriques	3,5 points
Exercice 3	Nombres complexes	3,5 points
Exercice 4	Etude des fonctions, Suites numériques et calcul intégral	13 points

Exercice 1 : (3,5 points)(au choix)

Soient p et q deux nombres premiers vérifiant : $9^{p+q-1} \equiv 1[pq]$ et $p < q$

0,5 1) a) Montrer que p et 9 sont premiers entre eux

1 b) En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1[p]$ et $9^{q} \equiv 1[p]$

0,5 2) a) Montrer que $(p-1)$ et q sont premiers entre eux

0,5 b) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p = 2$

0,5 c) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $9^{q-1} \equiv 1[q]$

0,5 d) En déduire que : $q = 5$

Exercice 2 :(3,5 points)(au choix)

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); +, .)$ Est un espace vectoriel réel de dimension 9 et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); +, \times)$ est un anneau non commutatif unitaire de zéro

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère le sous-ensemble $\boldsymbol{E} = \left\{ M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Première partie

0,5 1) a) Montrer que $\boldsymbol{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

0,25 b) Déterminer une base de l'espace vectoriel $(\boldsymbol{E}; +, .)$

0,25 2) a) Vérifier que :

$$\left(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right) \left(\forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3\right); M(x,y,z) \times M'(x',y',z') = M(xx' - yy', xy' + yx', zz')$$

0,5 b) Montrer que $(\boldsymbol{E}; +, \times)$ est un anneau commutatif

Deuxième partie

On considère le sous-ensemble $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{E}$ défini par : $\boldsymbol{F} = \{M(x,y,0) \in E / (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

0,25 1) a) Montrer que $\boldsymbol{F}$ est un sous-groupe du groupe $(\boldsymbol{E}, +)$

0,25 b) On note φ l'application définie ainsi :

$$\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \mapsto (\boldsymbol{F}, \times)$$
$$x + iy \mapsto M(x,y,0)$$

Montrer que l'application φ est un homomorphisme

0,25 c) En déduire que $(\boldsymbol{F}^*, \times)$ est un groupe commutatif (On remarque que $\boldsymbol{F}^* = F - \{0\}$

0,5 d) Montrer que $(\boldsymbol{F},+,\times)$ est un corps commutatif et préciser l'unité

0,25 2) a) Vérifier que : $(\forall M(x,y,0)\in F);\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times M(x,y,0)=O$

0,5 b) En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble $\boldsymbol{F}$ n'admet un inverse pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3 :(3,5 points)(obligatoire)

I - Soit m un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les deux équations :

$(E): z^2+2z+m^2=0$ et $(F): z^3+2(1-i)z^2+(1+m^2-4i)z-2i(1+m^2)=0$

0,5 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

0,5 2) a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera

0,5 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F)

II - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les deux points : $A(-1+mi)$ et $B(-1-mi)$

Soient W le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' le milieu du segment $[OA]$.

La rotation de centre W et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme A en $P(p)$, la rotation de centre A' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme B en $Q(q)$ et la rotation de centre B' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme O en $R(r)$

1,5 1) Montrer que : $p=-1+m\,,\ q=\frac{1-i}{2}(-1-mi)\ \ et\ \ r=\bar{q}$

0,25 2) a) Vérifier que : $q-r=-ip$

0,5 b) En déduire que $OP=QR$ et que les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.

Exercice 4 :(13 points)(obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0،1]$ par :

$$f(x)=x\,ln(2-x)$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\ cm$)

0,75 1) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur I et que :

$$(\forall x \in I);\ \ f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

0,5 b) Montrer que la fonction f' est strictement décroissante sur I

0,75 c) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0;1[$ tel que $f'(\propto) = 0$ et que

$$f(\propto) = \frac{\propto^2}{2-\propto}$$

0,75 2) a) Etudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations

0,5 b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ est concave

0,5 c) Montrer que : $(\forall (x;t) \in I^2); f(x) \leq (x-t)f'(t) + f(t)$

0,5 d) En déduire que : $(\forall x \in I); f(x) \leq x\ln 2 \quad et \quad f(x) \leq -x+1$

0,5 3) Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,75 4) Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 0; x = 1\ et\ y = 0$

Deuxième partie :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $I = [0;1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(2-x)$$

0,5 1) a) Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0) = f_n(1)$

0,5 b) Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0;1[$ tel que : $f'_n(\propto_n) = 0$

0,75 2) a) Montrer que f_n est dérivable sur I et que :

$$(\forall x \in I);\ f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x) \qquad avec \qquad g_n(x) = n\ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

0,5 b) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I

0,5 c) En déduire que $\propto_n$ est unique

3) On considère la suite numérique $(\propto_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie

1 a) Montrer que : $(\forall n \geq 2);\ \ f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{\propto_n^{n+1}}{2-\propto_n}\right)$, en déduire que :

	$\lim_{n\to+\infty} f_n(\propto_n) = 0$
1	b) Montrer que : $(\forall n \geq 2);\ g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\propto_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.
0,25	c) Montrer que la suite $(\propto_n)_{n\geq 2}$ est convergente
0,5	d) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \propto_n = 1$
	Troisième partie :
	Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.
075	1) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et qu'elle est convergente.
0,5	2) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right)dx$
0,75	3) Montrer que : $(\forall n \geq 2); 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire que : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

FIN